Ecuaciones Diferenciales – 2° cuatrimestre 2010

Práctica 1 – Ecuaciones de Primer Orden y Separación de Variables.

Ecuaciones de Primer Orden

1. Resolver la ecuación
$$yu_x + xu_y = 0$$
con $u(0,y) = e^{-y^2}$. ¿En que regiones del plano xy la solución esta univocamente determinada?

2. Mostrar, por consideraciones geométricas, que la solución general de
$$xu_x - yu_y = 0$$
es $u(x,y) = f(xy)$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$.
Encontrar una solución cuyo gráfico contiene a la recta de ecuación $y = x$. ¿Es unica?
¿Qué pasa con el problema de valores iniciales cuando estos se dan sobre la curva $y = 1/x$?

3. Probar que no existe solución de la ecuación
$$u_x + u_y = u$$
que satisfaga las condiciones iniciales $u = 1$ en la recta $y = x$.

4. Probar que la solución de la ecuación
$$u_x + u_y = u^2$$
con condición inicial $u(x,-x) = x$ no está definida sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$.

5. Sea $u(x,t)$ la solución clásica del problema
$$\begin{cases} u_t + f(x,t)u_x &= \psi(x,t), \\ u|_{t=0} &= u_0(x). \end{cases}$$
Probar que si $x(t)$ es una solucion de $\dot{x} = f(t,x)$ definida para t en un entorno de 0, sobre la trayectoria (x(t),t), u se expresa como
$$u(x(t),t) = u_0(x(0)) + \int_0^t \psi(x(\xi),\xi)d\xi.$$

6. Hallar la solución de la ecuación
$$(x^2 + y^2)u_x + 2xyu_y = (x+y)u$$
que satisface $u(0,y) = y$.

7. Dado
$$Lu \equiv x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} - 3u,$$
resolver:
   (a) $\begin{cases} Lu &= 0, \\ u(x,y,0) &= xy. \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} Lu &= 0, \\ u(x,y,0) &= f(x,y), \end{cases}$
   imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad a f.

8. Resolver
$$\begin{cases} x \cdot \nabla u &= |x|^2, \\ u|_{x_1=1} &= 3x_n. \end{cases}$$
Estudiar el dominio de definición de la solución.

Separación de Variables

9. Resolver, usando separación de variables, el problema: Si D es el cuadrado $(0,1) \times (0,1)$, se busca $u = u(x,y)$ tal que

   (a)
$$\begin{cases} \Delta u &= 0, & \text{en } D, \\ u(x,0) &= 0, \\ u(1,y) &= 0, \\ u(x,1) &= 0, \\ u(0,y) &= \sin(\pi y). \end{cases}$$

   (b)
$$\begin{cases} \Delta u &= 0, & \text{en } D, \\ u(x,0) &= 2\sin(3\pi x), \\ u(1,y) &= 0, \\ u(x,1) &= 0, \\ u(0,y) &= 3\sin(\pi y) + 5\sin(2\pi y). \end{cases}$$

10. Resolver usando separación de variables, el problema: Si D es el cuadrado $(0,1) \times (0,1)$, se busca $u = u(x,y)$ tal que
$$\begin{cases} \Delta u &= 0, & \text{en } D, \\ u(x,0) &= f_1(x), \\ u(1,y) &= f_2(y), \\ u(x,1) &= f_3(x), \\ u(0,y) &= f_4(y). \end{cases}$$
Imponer condiciones sobre las f_i para que la función hallada sea efectivamente solución de la ecuación.

11. Resolver, analizando la validez de la solución, la ecuación de Laplace en un disco en $\mathbb{R}^2$.

   (a) $\begin{cases} \Delta u &= 0 & \text{en } |x| < 1, \\ u &= f & \text{en } |x| = 1, \end{cases}$
   donde $f \in C^1(\{|x| = 1\})$.
   Sug.: Pasar a coordenadas polares y tener en cuenta que la solución de
$$t^2 v''(t) + t v'(t) - n^2 v(t) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$
   es
$$v_n(t) = \begin{cases} a + b \ln t & \text{si } n = 0, \\ a t^n + b\, t^{-n} & \text{si } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
   donde a y b son constantes.

   (b) $\begin{cases} \Delta u &= 0 & \text{en } |x| < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= f & \text{en } |x| = 1, \end{cases}$
   donde f es como en (a) y además $\int_{\{|x|=1\}} f\, dS = 0$ y u se anula en el origen.

   Probar la ecuación del item (b) no tiene solución si $\int_{\{|x|=1\}} f\, dS \neq 0$.
   ¿Qué sucede si no se requiere que u se anule en el origen?

12. Resolver por el método de separación de variables,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu &= 0, \qquad 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \\ u(\pi,t) &= 0, \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

Sugerencia: Proponer $v(x,t) = u(x,t)e^{ct}$.

13. Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= 0, & \text{en } (0,1) \times (0,\infty), \\ u_x(0,t) &= 0, & t > 0, \\ u_x(1,t) &= 0, & t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

con $u_0 \in L^2(0,1)$.

(a) Por el método de separación de variables, hallar la solución del problema y verificar que es una solución clásica en $(0,1) \times (0,\infty)$.

(b) Verificar que la solución hallada en (a) satisface $u(\cdot,t) \to u_0$ en $L^2(0,1)$ cuando $t \to 0$ y que $u(x,t) \to \int_0^1 u_0\, dx$ cuando $t \to \infty$ uniformemente. Interpretar físicamente.

14. Aplicar el método de separación de variables para resolver el siguiente problema de conducción de calor en un disco de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 & |x| < 1,\ t > 0 \\ u(x,t) &= 0 & |x| = 1,\ t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) & |x| \leq 1 \end{cases}$$

donde $u_0(x) = \phi(|x|)$ (y por ende $u(x,t) = w(|x|,t)$).

15. Resolver por el método de separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{en } (0,L) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = A,\ u(L,t) = B & \text{en } t > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) & \text{en } 0 < x < L, \end{cases}$$

donde A y B son constantes, reduciendo el problema a uno con condiciones homogéneas.

16. Resolver por el método de separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{en } (0,L) \times (0,\infty), \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(L,t) = 0 & \text{en } t > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) & \text{en } 0 < x < L. \end{cases}$$