**Ecuaciones Diferenciales – 2° cuatrimestre 2010**
Práctica 0 – Preliminares

1. Revisar los siguientes teoremas:

   (a) Teorema de convergencia monótona de Beppo Levi.

   (b) Teorema de convergencia dominada de Lebesgue.

   (c) Lema de Fatou.

2. Diferenciación bajo el signo integral.

   (a) Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $V \subset \mathbb{R}^m$ medible, $f : U \times V \to \mathbb{R}$ medible y $x_0 \in U$. Si $f(x, \cdot) \in L^1(V)$ para $|x - x_0| < \varepsilon$, $f(\cdot, y)$ es diferenciable en $|x - x_0| < \varepsilon$ para casi todo $y \in V$ y existe $g \in L^1(V)$ tal que
   $$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \right| \leq g(y) \ , \ |x - x_0| < \varepsilon \ , \text{ a.e. } y \in V$$
   con $1 \leq j \leq n$ fijo, entonces la función $F(x) = \displaystyle\int_V f(x, y)\, dy$ es derivable para $|x - x_0| < \varepsilon$ respecto de $x_j$, y
   $$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_V \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\, dy.$$

   (b) Verificar que si $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ es una función continua en $U \times \overline{V}$, con $V$ abierto acotado, entonces verifica las hipótesis del item anterior.

3. (a) Sean $f, g$ derivables, $h$ continua. Derivar
   $$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(s)\, ds.$$

   (b) Sean $f, g$ derivables, $h = h(x, s)$ continua y derivable respecto de $x$, $\frac{\partial h}{\partial x}$ acotada. Derivar
   $$G(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(x, s)\, ds.$$

4. (a) Desigualdad de Hölder: Si $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces
   $$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

   (b) Desigualdad de Minkowsky: Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces
   $$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

   (c) Desigualdad integral de Minkowsky: Si $1 \leq p < \infty$, entonces
   $$\left( \int \left| \int f(x, y)\, dx \right|^p dy \right)^{1/p} \leq \int \left( \int |f(x, y)|^p\, dy \right)^{1/p} dx.$$

**Definiciones:** Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $f\colon U \to \mathbb{R}$ una función continua. Se define el *soporte* de $f$ como $\operatorname{sop}(f) = \overline{\{x \in U\colon f(x) \neq 0\}}$.

- $C^0(U) := \{f\colon U \to \mathbb{R}\colon f \text{ es continua}\} = C(U)$
- $C_c^0(U) := \{f \in C^0(U)\colon \operatorname{sop}(f) \text{ es compacto}\} = C_c(U)$
- $C^1(U) := \{f \in C^0(U)\colon f \text{ es diferenciable en } U \text{ y } \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in C^0(U),\ 1 \leq i \leq n\}$
- $C^k(U) := \{f \in C^1(U)\colon \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in C^{k-1}(U),\ 1 \leq i \leq n\},\ k \geq 1$
- $C^\infty(U) = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(U)$
- $C_c^k(U) = C^k(U) \cap C_c^0(U),\ k \geq 1$
- $C_c^\infty(U) = C^\infty(U) \cap C_c^0(U)$
- $C^k(\overline{U}) = \displaystyle\bigcap_{\substack{V \text{ abierto} \\ \overline{U} \subset V}} C^k(V)$

**Notación:** La siguiente notación para las derivadas será de mucha utilidad. Sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multiíndice, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Definimos $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Entonces se denota, para $f \in C^{|\alpha|}(U)$,

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

5. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$, $\tau_{-h} f(x) := f(x+h)$.

   (a) Para $1 \leq p < \infty$, $\lim_{h \to 0} \|\tau_{-h} f - f\|_p = 0$.
   (Pista: usar que $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 \leq p < \infty$).

   (b) Mostrar que (a) no vale para $p = \infty$.

**Definición:** Dadas $f, g$ medibles en $\mathbb{R}^n$ se define la *convolución* de $f$ y $g$ como

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy$$

para los $x \in \mathbb{R}^n$ en donde la integral esté bien definida.

6. Desigualdad de Young.

   Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n),\ g \in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p \leq \infty$. Entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

7. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y se tiene que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$. Más aún, $f * g$ es uniformemente continua.

   **Definición:** Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ medible. Definimos

$$L^p_{\text{loc}}(E) := \bigcap_{\substack{K \subset E \\ K \text{compacto}}} L^p(K).$$

8. Sean $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ $(k \in \mathbb{N}),\ g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g,\ |\alpha| \leq k$.

9. (a) Sea

$$\rho(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

   Probar que $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Construir $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{sop}(\rho) \subset B(0,\varepsilon),\ \varepsilon > 0$.

10. Sea $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1$, y $\forall \varepsilon > 0$. Sea $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$. Probar que

   (a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p < \infty \Rightarrow \|f * \rho_\varepsilon - f\|_p \to 0$ si $\varepsilon \to 0$.

   (b) Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f$ uniformemente continua en $V \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\sup_{x\in V'} |f * \rho_\varepsilon(x) - f(x)| \to 0$ si $\varepsilon \to 0$ , $\forall V'$ compacto, $V' \subset V$.

   (c) Si $f$ es continua y acotada en $\mathbb{R}^n$, entonces $f * \rho_\varepsilon$ tiende uniformemente a $f$ en cada compacto de $\mathbb{R}^n$.

   (d) Si además $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

   (e) Calcular $f * \rho_\varepsilon$ si $f = \chi_{[a,b]}$ y $\rho$ es la función del ejercicio 9 (a).

11. Demostrar que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$.

    Pista: las funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto son densas en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$.

12. Sea $\Omega$ un dominio de $\mathbb{R}^n$.

    Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y $\int_\Omega f\varphi\,dx = 0\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow f = 0$ c.t.p.

13. Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ y $\int f\varphi'\,dx = 0\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f = \text{cte}$ c.t.p.

    Pista: tomar $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\int g = 1$ y para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, se verifica que $\varphi(x) - (\int \varphi)g(x)$ es la derivada de una función $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

    **Definición:** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Diremos que $\Omega$ es un dominio con frontera $C^r$ si es conexo y para todo $x_0 \in \partial\Omega$ existe un entorno $U$ de $x_0$, un entorno $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ y una función $\phi \in C^r(V)$ tal que (salvo un reordenamiento de las variables) el dominio se describe como sigue:

$$\Omega \cap U = \{x \in U :\ (x_1, ..., x_{n-1}) \in V;\ x_n > \phi(x_1, ..., x_{n-1})\},$$
$$\partial\Omega \cap U = \{x \in U :\ (x_1, ..., x_{n-1}) \in V;\ x_n = \phi(x_1, ..., x_{n-1})\}.$$

**Notaciones:**

- El operador *nabla* se define como

$$\nabla := (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}).$$

- Dada $u \in C^1(U)$ se define el *gradiente* de $u$ como

$$\text{grad}(u) := \nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}).$$

- Dada $\vec{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ con $f_i \in C^1(U)$ se define la *divergencia* de $\vec{F}$ como

$$\text{div}(\vec{F}) := \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

- Dada $u \in C^2(U)$ se define el *laplaciano u operador de Laplace* de $u$ como

$$\Delta u := \text{div}(\text{grad}(u)) = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

14. Fórmulas de Green

    Sea $\Omega$ un dominio en $\mathbb{R}^n$ con frontera $C^1$

(a) si $\vec{V} = \vec{V}(x) = (v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x))$, $v_i \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $1 \leq i \leq n$, entonces

$$\int_\Omega \nabla \cdot \vec{V}(x)\, dx = \int_\Omega \operatorname{div} \vec{V}(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{V}(x) \cdot \nu(x)\, dS_x,$$

donde $\nu = \nu(x)$ es el vector normal exterior unitario a $\partial\Omega$.

(b) si $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

$$\int_\Omega (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v)\, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS_x,$$

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left( v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS_x,$$

donde $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$.

15. Revisar los siguientes teoremas:

(a) Teorema de la Función Inversa.

(b) Teorema de la Función Implícita.

(c) Teorema de Arzelá – Ascoli.

(d) Teorema de la Partición de la Unidad.