Práctica 8: Medidas abstractas

Ejercicio 1. Probar que cada una de las siguientes ternas $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida. En cada caso encontrar todos los conjuntos de medida nula, calcular $L^1(\mu)$ y caracterizar $\int_X f d\mu$.

(a) **Medida de contar:** $X =$ un conjunto, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, $\mu(E) = \#E \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$.

(b) **Medida de contar pesada:** dada una sucesión de números $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [0, \infty)$ (llamados pesos), sean $X = \mathbb{N}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mu(E) := \sum_{k\in E} a_k$.

(c) **Medida delta:** $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$ es la sigma-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue y $\mu = \delta$, donde

$$\delta(E) = \begin{cases} 1, & 0 \in E, \\ 0, & 0 \notin E. \end{cases}$$

(d) **Medida de Lebesgue pesada:** $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$ es la sigma-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue y $w : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ es una función medible (llamada peso) y

$$\mu(E) := \int_E w(x)dx.$$

Ejercicio 2. Probar que toda medida μ definida sobre $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, es como la del ítem (b) del ejercicio anterior para una sucesión de pesos $(a_k)_k$ adecuada.

Ejercicio 3. Un espacio (X, Σ, μ) se dice de medida completa si dado $Z \in \Sigma$ tal que $\mu(Z) = 0$, para cada $Y \subseteq Z$ resulta $Y \in \Sigma$ y $\mu(Y) = 0$. En este caso, probar que:

(a) Si $Z_1 \in \Sigma,\ Z_1 \Delta Z_2 \in \Sigma$ y $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$, entonces $Z_2 \in \Sigma$.

(b) Si f es medible y $f = g$ a.e., entonces g es medible.

Ejercicio 4. Sea μ la medida contante sobre $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ (es decir, $\mu(A) = \#A$). Probar que $f \in L^1(\mathbb{N}, \mu)$ si y sólo si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$ y, en este caso, $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Ejercicio 5. Sea μ la medida sobre $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ definida por $\mu(E) = \sum\limits_{n\in E} \frac{1}{n^2}$.

(a) Probar que μ es una medida finita.

(b) Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

$$f_k(n) = \begin{cases} \sqrt{n} & , \quad 1 \le n \le k \\ 0 & , \quad k < n. \end{cases}$$

Probar que $(f_k)_{k\ge1}$ converge en μ-medida.

(c) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ /\ f(n) = \sqrt{n}$. ¿Para qué valores de $p \ge 1$, resulta $f \in L^p(\mathbb{N}, \mu)$?

Ejercicio 6. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida finita y $\varphi : X \to \mathbb{R}_{>0}$ una función μ–medible. Probar que:

(a) si φ es medible entonces está definida $\int_X \varphi \ln(\varphi)\, d\mu$,

(b) si φ pertenece a $L^2(X,\mu)$ entonces $\varphi \ln(\varphi)$ pertenece a $L^1(X,\mu)$.

Ejercicio 7. Sea $(X,\mathcal{A})$ un espacio medible y $\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty)$ una función de conjuntos tal que:

(i) Si $A, B \in \mathcal{A}$ son disjuntos, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,

(ii) Si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ y $A_n \searrow \emptyset$, entonces $\lim_n \mu(A_n) = 0$.

Probar que μ es una medida.

Ejercicio 8. Sean $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},\ \varphi : [0,1) \to S^1,\ \varphi(t) = e^{2\pi i t}$. En S^1 se considera la $\sigma-$álgebra
$$\mathcal{A} = \{A \subseteq S^1 : \varphi^{-1}(A) \text{ es medible Lebesgue}\}$$
y la medida m sobre $\mathcal{A}$ definida por:
$$m(A) = |\varphi^{-1}(A)|.$$
Dada $f : S^1 \to R_{\geq 0}$, tal que $f \circ \varphi$ es medible Lebesgue, probar que f es $\mathcal{A}-$medible y
$$\int_{S^1} f\ dm = \int_0^1 f \circ \varphi\ dt.$$

Ejercicio 9. Sea (X,Σ,μ) un espacio de medida positiva y finita. Sean $f \in L^1(X,\mu)$ y $S \subseteq \mathbb{C}$ cerrado tal que $\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in S$ para todo $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$. Probar que $f(x) \in S$, para casi todo x (respecto de μ).

Ejercicio 10. Sea ν una medida con signo sobre el espacio medible (X,Σ). Sean A un conjunto positivo y B un conjunto negativo con respecto a ν tales que: $X = A \cup B$ y $A \cap B = \phi$. Dado $E \in \Sigma$, probar:

(a) $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \sup\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$,

(b) $-\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = \inf\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$.

Ejercicio 11. Sean (X,Σ,μ) un espacio de medida, f tal que existe $\int_X f d\mu$ y $\nu(E) = \int_E f d\mu$
$(E \in \Sigma)$. Probar que:

(a) $\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu\ (E \in \Sigma)$,

(b) $\nu^-(E) = \int_E f^- d\mu\ (E \in \Sigma)$.

Ejercicio 12.

(a) Sean λ y μ medidas sobre (X,Σ) y $\lambda(X) < \infty$. Probar que
$$\lambda \ll \mu \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 :\ \mu(E) < \delta\ \Rightarrow\ \lambda(E) < \epsilon.$$

(b) Mostrar que sin la hipótesis $\lambda(X) < \infty$ (a) puede ser falso.

Ejercicio 13. Sean (X, Σ_1, μ) un espacio de medida finita y $f \in L^1(X, \mu)$. Sea Σ_2 una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X tal que $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$.

(a) Si $\mu_f(B) = \int_B f d\mu$ $(B \in \Sigma_2)$, entonces μ_f define una medida con signo sobre Σ_2, absolutamente continua con respecto a μ. Deducir que existe g Σ_2-medible tal que:

$$\int_B f d\mu = \int_B g d\mu \qquad (B \in \Sigma_2).$$

(b) Si $\Sigma_2 = \{\phi, B, B^c, X\}$ para algún $B \in \Sigma_1$, determinar la función g del inciso anterior.

Ejercicio 14. Sean X un conjunto y $A_1, \ldots, A_N$ subconjuntos disjuntos de X tal que $\cup_{i=1}^N A_i = X$. Sea Σ la $\sigma-$álgebra generada por $\{A_1, \ldots, A_N\}$. Probar que,

(a) $B \in \Sigma$ si y sólo si existen $i_1, \ldots, i_k$ tales que $B = \cup_{j=1}^k A_{i_j}$.

(b) Caracterizar las funciones $\sigma-$ medibles.

Ejercicio 15. Para cada uno de los siguientes espacios medibles $(X, \mathcal{A})$ y medidas λ, μ. Decidir si $\lambda \ll \mu$ y en caso de ser posible hallar una función densidad.

(a) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} =$ sigma-álgebra de Lebesgue, $\mu =$ medida de Lebesgue y $\lambda = \delta$.

(b) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} =$ sigma-álgebra de Lebesgue, $\lambda =$ medida de Lebesgue y $\mu =$ medida de contar. ¿Contradicen sus conclusiones el Teorema de Radon Nikodym?

(c) $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\lambda =$ medida de contar, $\mu =$ medida de contar con pesos $a_k = 1/2^k$.

Ejercicio 16. Sean (X, Σ) un espacio de medida, μ una medida finita y ν una medida signada definidas en Σ, tales que $\nu \ll \mu$.

(a) Probar que existe una función $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$\int f d\nu = \int f g d\mu \qquad , \forall f \text{ medible y tal que } \int f d\nu \text{ existe.}$$

(b) Probar que $\{x \in X : g(x) \geq 0\}$ y $\{x \in X : g(x) < 0\}$ son respectivamente un conjunto positivo y uno negativo para ν.

Ejercicio 17. (Descomposición polar de una medida compleja). Sean $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ una medida compleja. Llamemos $|\lambda|$ a su variación. Probar que existe una función medible $\rho : X \to \mathbb{C}$ tal que,

$$\lambda(E) = \int_E \rho d|\lambda|, \quad (E \in \mathcal{A}).$$

Probar que $|\rho| \equiv 1$ en casi todo punto y luego, $\left|\int_X f d\lambda\right| \leq \int_X |f| \, d\,|\lambda|$, para toda $f \in L^1(|\lambda|)$.

Ejercicio 18. Sean μ una medida de Borel finita sobre $\mathbb{R}$ y m la medida de Lebesgue unidimensional. Definimos $f(x) = \mu((-\infty, x])$, $\; -\infty < x < +\infty$.

(a) Pruebe que f es monótona creciente, $\mu((a, b]) = f(b) - f(a)$, f es continua por la derecha y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

(b) Pruebe que μ es absolutamente continua respecto de m si y sólo si f es una función absolutamente continua. Muestre que en ese caso, $\frac{d\mu}{dm} = f'$.

(c) Pruebe que μ es singular respecto m si y sólo si $f' = 0$ a.e. (sugerencia: considere un argumento similiar al usado para probar que las funciones monótonas son derivables en casi todo punto).

Ejercicio 19. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Notamos con $\mathcal{H}^\alpha$ la medida de Haussdorf α-dimensional.

(a) Probar que $\mathcal{H}^\alpha(E + x) = \mathcal{H}^\alpha(E)$ $\forall E$ medible, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Probar que $\mathcal{H}^\alpha(cE) = c^\alpha \mathcal{H}^\alpha(E)$ $\forall E$ medible, $\forall c > 0$.

(c) Probar que si $\mathcal{H}^\alpha(E) < \infty$, entonces $\mathcal{H}^\beta(E) = 0$ $\forall \beta > \alpha$

(d) Probar que si $0 < \mathcal{H}^\alpha(E) \leq \infty$, entonces $\mathcal{H}^\beta(E) = \infty$ $\forall \beta < \alpha$

Ejercicio 20. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos la *dimensión* de E como

$$dim(E) = \sup\{\alpha : \mathcal{H}^\alpha(E) = \infty\} = \text{ínf}\{\alpha : \mathcal{H}^\alpha(E) = 0\}$$

(a) Probar que $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$ $\forall \alpha > dim(E)$

(b) Sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Probar que si $dim(E_k) = d$ $\forall k \in \mathbb{N}$, entonces $dim(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_k) = d$

Concluir que si E es numerable, entonces $dim(E) = 0$.

(c) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación bi-Lipschitz, i.e. $\exists C_1, C_2 > 0$ tal que

$$C_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| < C_2|x - y|.$$

Probar que $dim(E) = dim(f(E))$.

Ejercicio 21. Sea (Ω, Σ, P) un espacio de probabilidad y sea $X = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$ una variable aleatoria simple, donde los números reales a_i son todos distintos, los conjuntos A_i son disjuntos dos a dos y $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Sea $\mathcal{U}(X) = \{X^{-1}(B)/\ B \text{ boreliano}\}$ la σ-álgebra generada por X.

(a) Describir precisamente los conjuntos que componen $\mathcal{U}(X)$.

(b) Probar que si una variable aleatoria Y es $\mathcal{U}(X)$-medible, entonces Y es constante en cada uno de los conjuntos A_i.

(c) Mostrar que, entonces, Y puede ser escrita como función de X.

Ejercicio 22.

(a) Probar que si A y B son eventos independientes en un espacio de probabilidad, entonces también lo son A^c y B. Idem para A^c y B^c.

(b) Sea $A_1, \dots, A_n$ una partición del espacio muestral Ω con $P(A_i) > 0$. Probar que si B es un evento con probabilidad positiva, entonces vale la *fórmula de Bayes*

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}.$$

Ejercicio 23.

(a) Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una función Σ-medible. Consideramos la medida μ_X en los borelianos de $\mathbb{R}$ definida por $\mu_X(A) = \mu(X^{-1}(A))$. Probar que para toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μ_X-integrable, vale que

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) d\mu_X = \int_{\Omega} f(X) d\mu$$

(b) Sea (Ω, Σ, P) un espacio de probabilidad y sea $X : \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$ una función Σ-medible con $\int_{\Omega} f dP = 1$. Definimos una medida ν sobre (Ω, Σ) por

$$\nu(A) = \int_{A} f dP.$$

Probar que (Ω, Σ, ν) es un espacio de probabilidad y que para toda $g : \Omega \to \mathbb{R}$ ν-integrable vale que

$$\int_{\Omega} g d\nu = \int_{\Omega} g f dP$$

(c) En particular, sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria y sea f la función de densidad de X.Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y supongamos que $Y = g(X)$ es integrable. Probar que

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} g f$$