Práctica 5: Teorema de Cambio de Variables

Ejercicio 1.

(a) Probar que para cualquier función medible no negativa $f(x,y)$ definida sobre $\mathbb{R}^2$ se cumple

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_G f(rcos\theta, rsen\theta)rdrd\theta$$

(b) Probar que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y sea $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(x) = xAx^t$. Probar que la función $f(x) = e^{-Q(x)}$ es integrable sobre $\mathbb{R}^n$ si y sólo si todos los autovalores de A son positivos.
Probar, además, que en tal caso

$$\int f = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}$$

Ejercicio 3. Decimos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una *función radial* si existe $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(\|x\|)$. Probar que existe una constante C_n tal que para toda función radial f vale que

$$\int f(x)dx = C_n \int_0^{+\infty} r^{n-1}g(r)dr$$

Ejercicio 4. ¿Para qué valores de p es $\|x\|^p$ integrable sobre la bola unitaria $\{\|x\| \leq 1\}$?

Ejercicio 5. Calcular

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x\|^2)^{\frac{n+1}{2}}}dx$$

Ejercicio 6. Demostrar que la integral biparamétrica

$$\int_0^1 x^{p-1}|\log x|^{q-1}dx$$

es finita si $p > 0$ y $q > 0$ y expresar su valor en términos de la función Γ.
Sugerencia: Considere el cambio de variables $x = e^{-t}$.