Vitali con medida exterior 1

Nos proponemos construir un conjunto $V^* \subset [0,1)$ con las siguientes propiedades:

1. $\forall x$ existe $y \in V^*$ tal que $x - y$ es racional.
2. Si $x, y \in V^*$ luego $x - y$ no es racional.
3. $|V^*|_e = 1$

Es claro que alcanza hallar un conjunto que verifique 2 y 3, pues en tal caso lo podemos completar (via lema de Zorn) hasta obtener uno que verifique 1 y como la medida exterior es monotona...¡ganamos!.

1. Preliminares

Lema 1: Sean $A \subset \mathbb{R}$, $x < y < z \in \mathbb{R}$, luego $|A \cap [x,z)|_e = |A \cap [x,y)|_e + |A \cap [y,z)|_e$.

Demostracion: Recordemos la condicion de Caratheodory, E es medible si y solo si $\forall B$:

$$|B|_e = |B \cap E|_e + |B \cap E^c|_e$$

Basta entonces aplicar lo anterior para $B = A \cap [x,z)$ y $E = [x,y)$. ‡

Corolario: $\forall A \subset \mathbb{R}$ vale que

$$|A \cap [0,n)|_e = |A \cap [0,1)|_e + |A \cap [1,2)|_e + ... + |A \cap [n-1,n)|_e$$

Necesitamos un lema mas:

Lema 2: Si $A_n \nearrow A$ entonces:

$$\lim_{n\to\infty} |A_n|_e = \left|\lim_{n\to\infty} A_n\right|_e = |A|_e$$

2. Bases de Hamel

Sea $\beta = \{v_i\}_{i\in I}$ una base de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, definimos entonces:

$$V_\beta = \left\{ x/x = \sum_{j\in J} a_j v_j,\ a_j \in \mathbb{Z}\ \forall j, J \subset I, J\ finito \right\}$$

Vamos a demostrar que $\forall x < y \in \mathbb{R}$, $|V_\beta \cap [x,y)|_e = y - x$. Supongamos que $1 \in \beta$, esto no es necesario pero simplifica las cuentas. Ademas pongamos $V = V_\beta$.

• Como $1 \in \beta$, $V \cap [0,1) + n = V \cap [n, n+1)$, pues $x \in V \cap [0,1)$ si y solo si $x + n \in V \cap [n, n+1)$. Luego $|V \cap [0,1)|_e = |V \cap [n, n+1)|_e$.

• Sea:

$$V_n = \frac{V \cap [0,n)}{n} \subset [0,1)$$

• Probemos que $|V_n|_e = |V_1|_e$:

$$|V_n|_e = \frac{1}{n} |V \cap [0,n)|_e$$
$$|V_n|_e = \frac{1}{n} \left(|V \cap [0,1)|_e + ... + |V \cap [n-1,n)|_e\right)$$
$$|V_n|_e = \frac{n}{n} |V \cap [0,1)|_e$$
$$|V_n|_e = |V_1|_e$$

• Notemos que $\forall x \in [0,1)$ existe n tal que $nx \in V$ (basta limpiar todos los denominadores de las coordenadas de x en la base β), luego $nx \in V \cap [0,n)$ y $x \in V_n$.

• Por ultimo, $\forall n$, $V_n \subset V_{n!} \subset V_{n+1!}$ (ya que podemos pensar a V_n como los $x \in [0,1)$ cuyas coordenadas (en la base β) se pueden escribir con denominador n).

Las observaciones anteriores las podemos resumir en $V_{n!} \nearrow [0,1)$, de donde por el Lema 2:

$$|V_1|_e = \lim_{n\to\infty} |V_{n!}|_e = \left|\lim_{n\to\infty} V_{n!}\right|_e = |[0,1)|_e = 1$$

Como $V \cap [0,1) + n = V \cap [n, n+1)$, si $a < b \in \mathbb{Z}$ luego $|V \cap [a,b)|_e = b - a$. Pero entonces lo anterior vale para $x < y \in \mathbb{R}$. Pues si tomamos $a < x < y < b$, con $a, b \in \mathbb{Z}$, luego:

$$b - a = |V \cap [a,b)|_e = |V \cap [a,x)|_e + |V \cap [x,y)|_e + |V \cap [y,b)|_e$$
$$b - a \leq x - a + y - x + b - y = b - a$$

De donde todas las desigualdades deben ser en realidad igualdades, en particular:

$$|V \cap [x,y)|_e = y - x, \ \forall x < y \in \mathbb{R}$$

3. Vitali al fin

Sea β una base de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial con $1 \in \beta$. Construimos V y V_1 como antes. Ahora, si $x, y \in V_1$, con $x - y \in \mathbb{Q}$ luego x e y tienen las mismas coordenadas en la base β salvo por la coordenada racional (la del 1)(pues $1 \in \beta$). Si estas son r_x y r_y, entonces $x - y = r_x - r_y \in \mathbb{Z}$ pues como $x, y \in V$ entonces r_x, r_y son enteros. Pero $-1 < x - y < 1$, luego $x = y$. Ademas ya hemos probado que $|V_1|_e = 1$, de donde podemos extender V_1 a un V^* que verifique 1,2,3.

Pregunta: ¿Porque definir V como los que tienen coordenadas enteras y no como los que tienen su coordenada racional (la del 1) entera, de forma que V_1 ya queda un Vitali y no dar tantas vueltas?
Respuesta: Porque me parecia mas natural.

Problema: Construir un Vitali V^{**} que tenga medida exterior maxima en cualquier intervalo de la recta.