Ejercicio. *Probar que*

$$f(z) = \prod_{n\geq 1} \frac{n^2+z^2}{n^2-z^2}$$

define una función meromorfa en $\mathbb{C}$*, y hallar el orden de cada uno de sus polos.*

En la materia no dimos ningún resultado sobre cuándo un producto infinito de funciones meromorfas da como resultado una función meromorfa; la idea del problema era considerar el abierto más grande posible en el que todas fueran holomorfas, y trabajar ahí.

Para $n \in \mathbb{N}$, la función $f_n(z) = \frac{n^2+z^2}{n^2-z^2}$ tiene polos simples en n y $-n$. Por lo tanto, en el abierto $U = \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ todas las funciones f_n son holomorfas. Luego, para ver que en dicho abierto el producto definía una función holomorfa, bastaba con ver que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n - 1$ era normalmente convergente en compactos de U, cuenta que no ofrecía mayores dificultades. Entonces los puntos de $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ resultan singularidades aisladas de la función obtenida, y parte del problema era probar que estas eran polos simples.

De todas maneras, sí hay un resultado sobre cuándo un producto infinito de funciones meromorfas da una función meromorfa, enteramente análogo al enunciado en clase para series de funciones meromorfas. El resultado es el siguiente:

Proposición. *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$, y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones meromorfas en U. Si para toda bola B tal que $\bar{B} \subseteq U$ existe un n_0 tal que f_n no tiene polos en $\bar{B}$ para $n \geq n_0$, y la serie $\sum_{n\geq n_0} |f_n - 1|_{\bar{B}}$ converge, entonces siendo $\prod_{n\geq n_0} f_n$ un producto de funciones holomorfas normalmente convergente en B, podemos definir para $z \in B$*

$$f(z) = \Big(\prod_{n=1}^{n_0-1} f_n(z)\Big) \cdot \Big(\prod_{n\geq n_0} f_n(z)\Big),$$

obteniendo así una función meromorfa en B. Haciendo esto en todas las bolas, obtenemos una función meromorfa en U.

La idea no era que enunciaran por su cuenta este resultado (y menos que lo demostraran), pero de todas maneras, les dimos crédito a quienes usaron ideas que se acercan a las que aparecen en esta proposición.