Análisis I – Matemática I – Análisis II (C)
Segundo Cuatrimestre - 2010

Práctica 5:
Extremos

---

1. Sea $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$, calcular máximos y mínimos absolutos en el intervalo [-5,5]. Hacer un gráfico aproximado de la función.

2. La empresa Pepsi quiere fabricar "Narajsi", un nuevo producto sabor naranja que saldrá al mercado envasado en latitas de volumen fijo V. ¿Cuál debe ser la relación entre el radio de la base y la altura de la lata para que Pepsi minimice el costo de aluminio? Observe que dicha relación no depende del volumen.

3. (a) Calcular los extremos de $f(x,y) = x^2+y^4$ y de $g(x,y) = x^4+y^4$ y sus hessianos en dichos puntos.

   (b) Sea f de clase C^2 tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$. ¿Es necesariamente $Hf(a)$ definida positiva o negativa?

4. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y analizar cuáles son puntos de ensilladura:

   (a) $f(x,y) = x^2 - y^2$

   (b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x$

   (c) $f(x,y) = xy$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2y}} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases}$

5. Sea $f(x,y) = (y-3x^2)(y-x^2)$. Probar que:

   (a) $(0,0)$ es un punto de ensilladura.

   (b) El determinante de la matriz $Hf(0,0)$ es cero.

   (c) f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$ sobre cada recta que pase por $(0,0)$, es decir, si $g(t) = (at, bt)$ entonces $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de a, b.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

   (a) Probar que $(0,0)$ es un punto crítico pero no extremo.

   (b) Probar que $\pm\sqrt{2}(1,-1)$ son mínimos absolutos. ¿Hay máximos relativos?

7. Para las siguientes funciones, encontrar los puntos críticos y analizar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos de ensilladura. Si fuera necesario realice el mapa de gradientes para analizar lo pedido.

(a) $f(x,y) = (2x+1-y)^2$
(b) $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$
(c) $f(x,y) = 10x^2 + 10y^2 + 12xy + 2x + 6y + 1$
(d) $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$
(e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + xy$
(f) $f(x,y) = (x-y)^2 + 1 + 2(x-y)$
(g) $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$
(h) $f(x,y,z) = xy + z^2$
(i) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2xz + z$
(j) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$
(k) $f(x) = \frac{1}{1+||x||^2}, \ \ x \in \mathbb{R}^n$

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que:

$$f(0,1) = 0, \nabla f(0,1) = (0,2) \text{ y } Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por $g(x,y) = 3x^2y + e^{f(x,y)} - 2y$

(a) Calcular $Hg(0,1)$
(b) ¿Tiene g un extremo relativo en $(0,1)$?

9. Sea $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3yx^2$.

(a) Probar que el punto $(0,0)$ es punto crítico de f y calcular el Hessiano en dicho punto.
(b) Probar que f a lo largo de cualquier recta tiene un mínimo en el origen.
(c) Muestre que el origen es punto silla de f y analice por qué no contradice esto el punto anterior. (Sugerencia: considere la trayectoria $\alpha(t) = (t, \frac{3}{2}t^2)$).

10. Decidir si existen o no, números reales a y b tales que la función

$$f(x,y) = e^{y^4 - x^2} + a(x-y) + b(x-2)(y-1)$$

tenga un mínimo relativo en el punto $(2,1)$.

11. Si el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x,y)$ en $(0,0)$ es

$$P(x,y) = 1 + 2x - y + xy - x^2 + y^2$$

¿Tiene

$$g(x,y) = f(x,y) - 2x + y + x^2y$$

un mínimo local en $(0,0)$?