1	2	3	4	5	Calificación

Apellido y Nombre: Turno-Comisión:
No. de libreta: Carrera:

ANÁLISIS 1

Final - 28/12/2010

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Probar que f es diferenciable en $(0,0)$ pero que las derivadas parciales de f no son continuas en $(0,0)$.

2. Probar que: $\sin(x)\sin(y)\sin(z) \leq \frac{1}{8}$, si $0 \leq x, y \leq \pi_2, x+y+z = \frac{\pi}{2}$.

3. Sea $f : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ biyectiva de clase C^2 con inversa también de clase C^2 $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ (se verifica: $g \circ f(x) = x$ y $f \circ g(x) = x$).

a) Calcular $g''(x)$ para todo $x \in (\alpha,\beta)$ en función de f y sus derivadas.

b) Si $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ probar que $g''(x) < 0$ para todo $x \in (\alpha,\beta)$.

4. Sea A es un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ diferenciable, $p = (x_0,y_0) \in A$, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2,3)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial v_1}(p) = a,\ \frac{\partial f}{\partial v_2}(p) = b.$$

a) Calcular $\nabla f(p)$.

b) ¿Cuánto valen a y b si f tiene un máximo local en p?

c) Probar que si $(a,b) \neq (0,0)$ el plano tangente al gráfico de f en p nunca es horizontal.

5. Consideremos la función $F : \mathbb{R}^2_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x,y) = \iint_{R_{xy}} e^{(u-1)(v^2-v)}\,du\,dv,$$

donde R_{xy} es el rectángulo dado por $[0,x] \times [0,y]$.

a) Calcular $F(x,0)$ y $F(0,y)$ para todos los valores de $x, y \geq 0$.

b) Encontrar $\nabla F(1,1)$.

Justifique todas sus respuestas.