
ÁLGEBRA II

Segundo Cuatrimestre — 2010

Práctica 4

1. Probar que los siguientes conjuntos, con las operaciones definidas tienen estructura de anillo:

- a) $(A^{n \times n}, +, \cdot)$ (matrices de $n \times n$, A anillo conmutativo).
- b) $(A[X_1, \dots, X_n], +, \cdot)$; polinomios en n variables, A anillo conmutativo.
- c) $(A^X = \{f : X \rightarrow A\}, +, \cdot)$; A anillo, X conjunto, $+$ y $\cdot$ punto a punto.
- d) $A_1 \times \dots \times A_n$; $A_1, \dots, A_n$ anillos, suma y producto coordenada a coordenada.
- e) $\{\mathcal{P}(X), \triangle, \cap\}$ con X conjunto.
- f) $\mathbb{Z}[G] = \{\sum_{g \in G} a_g \cdot g \mid a_g \in \mathbb{Z}\}$ con G grupo finito y

$$\sum a_g \cdot g + \sum b_g \cdot g = \sum (a_g + b_g) \cdot g$$

$$(\sum a_g \cdot g) \cdot (\sum a_h \cdot h) = \sum a_g b_h \cdot gh$$

- g) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ con $d \in \mathbb{Z}$, d libre de cuadrados.
- h) $(\text{End}(G), +, \circ)$; G grupo abeliano, $+$ punto a punto y $\circ$ la composición de morfismos.

Decidir cuáles son conmutativos, cuáles son dominios íntegros, anillos de división, cuerpos.

2. Dar ejemplos de

- a) anillo de división que no sea cuerpo.
- b) anillo que no sea íntegro.
- c) anillo íntegro que no sea de división.

3. ¿Existe algún producto $\cdot$ que haga de $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ un cuerpo? ($+$ es la suma usual)

4. Sea $A = \mathcal{C}[0, 1]$ el anillo de funciones reales continuas definidas en $[0, 1]$.

- a) ¿Hay divisores de cero en A ?
- b) ¿Cuáles son los elementos inversibles en A ?

5. Sea A un anillo con identidad 1
 - a) Probar que $\mathcal{U}(A) = \{a \in A : a \text{ es inversible}\}$ es un grupo multiplicativo.
 - b) Hallar $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$ para $m = 3, 4, 5, 6, 8$.
 - c) ¿Cuál es el orden de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$?
 - d) ¿Es $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_8) \simeq \mathcal{U}(\mathbb{Z}_5)$?
6. Consideremos el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$
 - a) Probar que en $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ la escritura es única. Es decir que si $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$, entonces $a = c$ y $b = d$.
 - b) Sea $N : \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{Z}$ la función (norma) definida por $N(a + b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2$. Probar que es multiplicativa.
 - c) Probar que $2 + \sqrt{3}$ es una unidad.
 - d) Probar que $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ es una unidad si, y sólo si, $N(z) = 1$ ó $N(z) = -1$.
 - e) Hallar otras unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.
7. Caracterizar el grupo de unidades de:
 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}$ cuerpo, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $B[X]$ con B dominio íntegro.
8. Sea D un dominio de integridad finito. Probar que D es un cuerpo.
9. Hallar todos los ideales primos de $\mathbb{Z}$.
10. Probar que si $\mathbb{K}$ es un cuerpo entonces $\mathbb{K}[X]$ es un dominio principal. ¿Es $\mathbb{Z}[X]$ un dominio principal?
11. Sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo de anillos. Probar que
 - a) $\text{im}(f)$ es un subanillo de B
 - b) $\ker(f)$ es un ideal de A
 - c) $A/\ker(f) \simeq \text{im}(f)$ (como anillos)
12. Sea A un anillo. Probar que A es un anillo de división si, y sólo si, los únicos ideales a izquierda de A son 0 y A .
13. Sean A un anillo conmutativo e $\mathcal{I}$ un ideal de A . Probar que $\mathcal{I}$ es un ideal primo de A si y sólo si $A/\mathcal{I}$ es un dominio íntegro.
14. Probar que en un anillo conmutativo todo ideal maximal es primo.
15. Sea A un anillo conmutativo y sea $\mathcal{M}$ un ideal de A . Probar que $\mathcal{M}$ es maximal si y sólo si $A/\mathcal{M}$ es un cuerpo.
16. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea $f \in \mathbb{K}[X]$. Probar que $\mathbb{K}[X]/\langle f \rangle$ es un cuerpo, si y sólo si, f es irreducible en $\mathbb{K}[X]$. ¿Sigue valiendo esto si se reemplaza el cuerpo $\mathbb{K}$ por un anillo conmutativo A ?

17. Probar que $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2 + 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}[i]$.
18. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Probar que los únicos ideales biláteros de $M_2(\mathbb{K})$ son 0 y $M_2(\mathbb{K})$. ¿Es $M_2(\mathbb{K})$ un anillo de división?
19. Sea A un anillo. Probar que existe un subanillo $B \subset A$ tal que $B \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$.
20. Probar que $\mathbb{Z}[i]/\langle 1 + i \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$.
Caracterizar el anillo cociente $\mathbb{Z}[i]/\langle 1 + 2i \rangle$.
21. Probar que si $\mathcal{I}$ es un ideal primo de $\mathbb{Z}[X]$ entonces $\mathcal{I} \cap \mathbb{Z}$ es un ideal primo de $\mathbb{Z}$.
22. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Probar que $\mathbb{Z}[X]/\langle p \rangle \simeq \mathbb{Z}_p[X]$.
23. Sean A un anillo e $\mathcal{I}$ un ideal de A . Probar que hay una correspondencia biyectiva entre los ideales de $A/\mathcal{I}$ y los ideales de A que contienen a $\mathcal{I}$.
24. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Probar que $\langle p \rangle$ es un ideal primo en $\mathbb{Z}[i]$ si, y sólo si, -1 no es un cuadrado en $\mathbb{Z}_p$.
25. Probar que todo morfismo de anillos que sale de un cuerpo es inyectivo.
26. Hallar las unidades de $\mathbb{Z}[X]/\langle X^3 \rangle$.
27. Probar que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un morfismo de cuerpos entonces $f = id$.
28. Hallar todos los morfismos de cuerpos $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.