# Álgebra 1

## Segundo Cuatrimestre 2010

## Práctica 5 - Enteros (segunda parte)

1. Determinar cuántos divisores positivos tienen $9000$, $15^4 \cdot 42^3 \cdot 56^5$ y $10^n \cdot 11^{n+1}$. ¿ Y cuántos divisores en total ?

2. Hallar la suma de los divisores positivos de $2^4 \cdot 5^{123}$ y de $10^n \cdot 11^{n+1}$

3. Hallar el menor número natural $n$ tal que $6552\,n$ sea un cuadrado.

4. Decidir si existen enteros $a$ y $b$ no nulos que satisfagan

   i) $a^2 = 8b^2$ ii) $a^2 = 3b^3$ iii) $7a^2 = 11b^2$

5. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probar que si $p$ es un primo positivo entonces $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$

6. i) Calcular las máximas potencias de 3 y de 9 que dividen a 77!
   ii) Calcular la máxima potencia de 20 que divide a $81!$
   iii) Determinar en cuántos ceros termina el desarrollo en base 16 de $20!$

7. Sea $p$ primo positivo. Probar que si $0 < k < p$, entonces $p$ divide a $\binom{p}{k}$

8. Probar que existen infinitos primos congruentes a 3 módulo 4.
   Sugerencia: probar primero que si $a \neq \pm 1$ satisface $a \equiv 3 \pmod 4$, entonces existe $p$ primo, $p \equiv 3 \pmod 4$ tal que $p \,|\, a$. Luego probar que si existieran sólo finitos primos congruentes a 3 módulo 4, digamos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, entonces $a = -1 + 4.\prod_{i=1}^{n} p_i$ sería un entero distinto de 1 y $-1$ que no es divisible por ningún primo congruente a 3 módulo 4.

9. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Probar que si $a^n \,|\, b^n$ entonces $a \,|\, b$

10. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

    i) $(n : 945) = 63$, $(n : 1176) = 84$ y $n \leq 2800$
    ii) $(n : 1260) = 70$ y $n$ tiene 30 divisores positivos
    iii) $[n : 130] = 260$

11. Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 10$ y $[\,a : b\,] = 1500$

12. i) Calcular $(18^n - 1 : 1292)$ para cada $n \in \mathbb{N}$
    ii) Probar que $(2^n + 7^{n+1} : 2^{n+1} + 7^n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$

13. i) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a : 25) = 5$. Calcular $(a^4 + 3a + 5^{232} : 150)$
    ii) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 3$. Calcular $(a^2 b : 9a + 9b)$

14. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $((a^2 + 3)(7a - 2) : 15) = 5$

**15**. Hallar, cuando existan, todos los enteros $a$ que satisfacen simultáneamente:

i) $\begin{cases} a \equiv 0 \quad (8) \\ a \equiv 2 \quad (5) \\ a \equiv 1 \quad (21) \end{cases}$ ii) $\begin{cases} a \equiv 3 \quad (10) \\ a \equiv 2 \quad (7) \\ a \equiv 5 \quad (9) \end{cases}$

iii) $\begin{cases} a \equiv 1 \quad (6) \\ a \equiv 2 \quad (20) \end{cases}$ iv) $\begin{cases} a \equiv 1 \quad (12) \\ a \equiv 7 \quad (10) \\ a \equiv 4 \quad (9) \end{cases}$

**16**. i) ¿Existe algún entero $a$ cuyo resto en la división por 15 sea 2 y cuyo resto en la división por 18 sea 8?
ii) ¿Existe algún entero $a$ cuyo resto en la división por 15 sea 13 y cuyo resto en la división por 35 sea 22?

**17**. i) Hallar el menor entero positivo $a$ tal que el resto de la división de $a$ por 21 es 13 y el resto de la división de $6a$ por 15 es 9.
ii) Hallar un entero $a$ entre 60 y 90 tal que el resto de la división de $2a$ por 3 es 1 y el resto de la división de $7a$ por 10 es 8.

**18**. Hallar el resto de la división de $a$ por $p$ en los casos

i) $a = 33^{1427}$, $p = 5$
ii) $a = 71^{22283}$, $p = 11$
iii) $a = 5 \cdot 7^{2451} + 3 \cdot 65^{2345} - 23 \cdot 8^{138}$, $p = 13$

**19**. i) Resolver la ecuación de congruencia $7^{13}X \equiv 5\ (11)$
ii) Resolver la ecuación de congruencia $2^{94}X \equiv 7\ (97)$

**20**. Sean $p$ y $q$ dos primos positivos distintos y $a \in \mathbb{Z}$. Probar que si $a$ es un entero coprimo con $p\,q$ entonces $p\,q \mid a^{(p-1)(q-1)} - 1$, y que para todo $a$ vale $a \equiv a^{(p-1)(q-1)+1} \pmod{p\,q}$

**21**. Probar que si $a$ es un entero coprimo con 561 entonces $561 \mid a^{560} - 1$

**22**. Probar que para todo $a \in \mathbb{Z}$ vale i) $728 \mid a^{27} - a^3$ ii) $\dfrac{2a^7}{35} + \dfrac{a}{7} - \dfrac{a^3}{5} \in \mathbb{Z}$

**23**. Hallar el resto de la división de

i) $3 \cdot 7^{135} + 24^{78} + 11^{222}$ por 70
ii) $3^{385}$ por 400
iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{1759} i^{42}$ por 56

**24**. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que i) $539 \mid 3^{253}a + 5^{44}$ ii) $a^{236} \equiv 6\ (19)$

**25**. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $3^n \equiv 53\ (77)$

**26**. Hallar el resto de la división de $2^{2^n}$ por 13 para cada $n \in \mathbb{N}$

**27**. Hallar todos los divisores positivos de $25^{70}$ que sean congruentes a 2 módulo 9 y a 3 módulo 11.

**28**. i) Probar que $(3a^6 - 3 : 5a^6 + 2) = 1$ ó 7. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ para los cuales vale 7
ii) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(3a^7 - 3 : 5a^7 + 2) = 7$
iii) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(11a^6 + 1 : 90) = 5$
iv) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(9a^{25} + 10 : 280) = 35$. Hallar el resto de la división de $a$ por 70
v) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(3a^{98} - 5a^{50} + 4 : 140\,a) = 14$