

Álgebra 1

Segundo Cuatrimestre 2010

Práctica 4 - Enteros (primera parte)

1. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

- | | |
|---|---|
| i) $ab \mid c \Rightarrow a \mid c$ y $b \mid c$ | vi) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow ab \mid c$ |
| ii) $4 \mid a^2 \Rightarrow 2 \mid a$ | vii) $a \mid b \Rightarrow a \leq b$ |
| iii) $2 \mid ab \Rightarrow 2 \mid a$ ó $2 \mid b$ | viii) $a \mid b \Rightarrow a \leq b $ |
| iv) $9 \mid ab \Rightarrow 9 \mid a$ ó $9 \mid b$ | ix) $a \mid b + a^2 \Rightarrow a \mid b$ |
| v) $a \mid b + c \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$ | |

2. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| i) $3n - 1 \mid n + 7$ | iii) $2n + 1 \mid n^2 + 5$ |
| ii) $3n - 2 \mid 5n - 8$ | iv) $n - 2 \mid n^3 - 8$ |

3. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

- | | |
|--|--|
| i) $99 \mid 10^{2n} + 197$ | iii) $56 \mid 13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$ |
| ii) $9 \mid 7 \cdot 5^{2n} + 2^{4n+1}$ | iv) $256 \mid 7^{2n} + 208n - 1$ |

4. i) Probar que $a - b \mid a^n - b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Probar que si n es un número natural par entonces $a + b \mid a^n - b^n$.

iii) Probar que si n es un número natural impar entonces $a + b \mid a^n + b^n$.

5. Hallar todos los primos positivos menores o iguales que 100

6. i) Probar que un número natural n es compuesto si y sólo si es divisible por algún primo positivo $p \leq \sqrt{n}$

ii) Determinar cuáles de los siguientes enteros son primos: 91, 209, 307, 791, 1001, 3001

7. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que

i) si n es compuesto, entonces $2^n - 1$ es compuesto

ii) si $2^n + 1$ es primo, entonces n es una potencia de 2

8. Calcular el cociente y el resto de la división de a por b en los casos

- | | |
|-----------------------------------|---|
| i) $a = 133, \quad b = -14$ | iv) $a = b^2 - 6, \quad b \neq 0$ |
| ii) $a = 13, \quad b = 111$ | v) $a = n^2 + 5, \quad b = n + 2 \quad (n \in \mathbb{N})$ |
| iii) $a = 3b + 7, \quad b \neq 0$ | vi) $a = n + 3, \quad b = n^2 + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ |

9. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de

- | | |
|--|--------------------------------------|
| i) la división de $a^2 - 3a + 11$ por 18 | iv) la división de $a^2 + 7$ por 36 |
| ii) la división de a por 3 | v) la división de $7a^2 + 12$ por 28 |
| iii) la división de $4a + 1$ por 9 | vi) la división de $1 - 3a$ por 27 |

22. Sea $a \in \mathbb{Z}$, $a > 1$ y sean $n, m \in \mathbb{N}$.

- i) Probar que si r es el resto de la división de n por m , entonces el resto de la división de $a^n - 1$ por $a^m - 1$ es $a^r - 1$
- ii) Probar que $(a^n - 1 : a^m - 1) = a^{(n:m)} - 1$

23. Sea $a \in \mathbb{Z}$.

- i) Probar que $(5a + 8 : 7a + 3) = 1$ o 41, y dar un ejemplo para cada caso
- ii) Probar que $(2a^2 + 3a - 1 : 5a + 6) = 1$ o 43, y dar un ejemplo para cada caso

24. i) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\frac{b+4}{a} + \frac{5}{b} \in \mathbb{Z}$

ii) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\frac{9a}{b} + \frac{7a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$

iii) Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $\frac{2a+3}{a+1} + \frac{a+2}{4} \in \mathbb{Z}$

25. Sean p y q primos positivos distintos y sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que si $pq \mid a^n$ entonces $pq \mid a$

26. i) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c > 0$. Probar que $(ca : cb) = c(a : b)$

ii) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Probar que

(a) si $(a : b) = 1$ entonces $(a^n : b^n) = 1$

(b) si $(a : b) = d$ entonces $(a^n : b^n) = d^n$

27. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que

i) si $(a : b) = 1$ entonces $(7a - 3b : 2a - b) = 1$

ii) si $(a : b) = 1$ entonces $(2a - 3b : 5a + 2b) = 1$ ó 19, y dar un ejemplo para cada caso

iii) si $(a : b) = 2$ entonces $(5a - 3b : 4a + b) = 2$ ó 34, y dar un ejemplo para cada caso

28. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que

i) $(2^n + 7^n : 2^n - 7^n) = 1$

ii) $(2^n + 5^{n+1} : 2^{n+1} + 5^n) = 3$ ó 9, y dar un ejemplo para cada caso

iii) $(3^n + 5^{n+1} : 3^{n+1} + 5^n) = 2$ ó 14, y dar un ejemplo para cada caso

29. Determinar, cuando existan, todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ que satisfacen

i) $5a + 8b = 3$

ii) $24a + 14b = 7$

iii) $39a - 24b = 6$

30. Si se sabe que cada unidad de un cierto producto A cuesta 39 pesos y que cada unidad de un cierto producto B cuesta 48 pesos, ¿cuántas unidades de cada producto se pueden comprar con 135 pesos?

31. Hallar, cuando existan, todas las soluciones de las siguientes ecuaciones de congruencia

i) $17X \equiv 3 \pmod{11}$

ii) $56X \equiv 28 \pmod{35}$

iii) $56X \equiv 2 \pmod{884}$

iv) $33X \equiv 27 \pmod{45}$

32. Hallar el resto de la división de un entero a por 18, sabiendo que el resto de la división de $7a$ por 18 es 5

33. Retomando el ejercicio 21, determinar para qué valores de $a \in \mathbb{Z}$ se tiene

i) $(5a + 8 : 7a + 3) = 1$ y $(5a + 8 : 7a + 3) = 41$

ii) $(2a^2 + 3a - 1 : 5a + 6) = 1$ y $(2a^2 + 3a - 1 : 5a + 6) = 43$

34. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(7a + 1 : 5a + 4) \neq 1$