Álgebra 1

Segundo Cuatrimestre 2010

Práctica 2 - Naturales

1. Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria

i) $1+2+3+4+\cdots+100$

ii) $1+2+4+8+16+\cdots+1024$

iii) $1+(-4)+9+(-16)+25+\cdots+(-144)$

iv) $1+9+25+49+\cdots+441$

v) $1+3+5+\cdots+(2n+1)$

vi) $n+2n+3n+\cdots+n^2$

2. Escribir los dos primeros y los dos últimos términos de las sumatorias siguientes

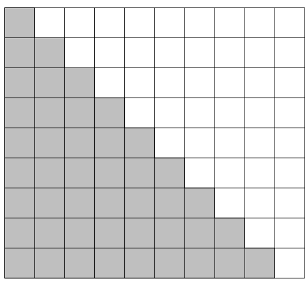
i) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$

ii) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i}$

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{i}$

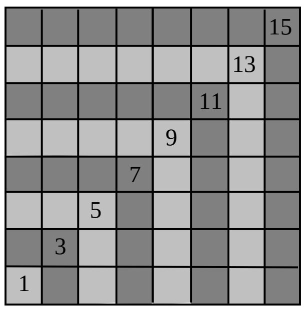
3. i) Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ contando de dos maneras la cantidad de cuadraditos sombreados del diagrama



ii) Deducir que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$

4. Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

i) contando de dos maneras la cantidad total de cuadraditos del diagrama



ii) usando el ejercicio 3.

iii) usando el principio de inducción

5. Calcular

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(4i+1)$

ii) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n}2(i-5)$

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$ (Sugerencia: $\dfrac{1}{i(i+1)}=\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i+1}$).

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ (Sugerencia: calcular $\dfrac{1}{2i-1}-\dfrac{1}{2i+1}$).

6. Probar que las siguientes igualdades son verdaderas para todo $n\in\mathbb{N}$

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\,i^2=\frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}$

iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{-1}{4i^2-1}=\frac{n+1}{2n+1}$

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i+1)\,3^{i-1}=n\,3^n$

v) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i\,2^i}{(i+1)(i+2)}=\frac{2^{n+1}}{n+2}-1$

vi) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\frac{n+i}{2i-3}=2^n(1-2n)$

7. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n\in\mathbb{N}$

i) $n<2^n$

ii) $3^n+5^n\geq 2^{n+2}$

iii) $3^n\geq n^3$

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{i+1}\leq 1+n(n-1)$

v) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n}\frac{i}{2^i}\leq n$

vi) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^n}\frac{1}{2i-1}>\frac{n+3}{4}$

8. Sean $a,b\in\mathbb{R}$. Probar que, $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle a^n-b^n=(a-b)\sum_{i=1}^{n}a^{i-1}\,b^{n-i}$.

9. Probar que, $\forall\,n\in\mathbb{N}$, vale

i) $n!\geq\dfrac{3^{n-1}}{2}$

ii) $\dbinom{2n}{n}\leq 4^n$

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\leq 2-\frac{1}{2^{n-1}}$

10. Sea $a\in\mathbb{R}$, $a\geq -1$. Probar que, $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $(1+a)^n\geq 1+na$.
¿En qué paso de la demostración se usa que $a\geq -1$?

11. Probar que

i) $n! \geq 3^{n-1}, \ \forall\, n \geq 5$
ii) $3^n - 2^n > n^3, \ \forall\, n \geq 4$
iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{3^i}{i!} < 6n - 5, \ \forall\, n \geq 3$
iv) $\displaystyle\binom{2n}{n} > n\, 2^n, \ \forall\, n \geq 4$

12. Probar que para todo $n \geq 3$ valen

i) la cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\dfrac{n(n-3)}{2}$
ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi\,(n-2)$

13. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 5, \qquad a_{n+1} = 3a_n - 2^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = 2^n + 3^n$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 2\,n\,a_n + 2^{n+1} n! \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = 2^n\, n!$.

iii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = a_n + n(3n+1) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = n^2(n-1)$.

iv) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 4a_n - 2\frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = \dbinom{2n}{n}$.

14. Para cada una de las siguientes sucesiones definidas por recursión, hallar una fórmula para el término general y demostrar su validez

i) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (1 + \sqrt{a_n})^2 \ (n \in \mathbb{N})$
ii) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n + 3^n \ (n \in \mathbb{N})$
iii) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = n\, a_n \ (n \in \mathbb{N})$
iv) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n} \ (n \in \mathbb{N})$

15. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$

ii) Hallar una fórmula para el término general de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por
(a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + n^3 \ (n \in \mathbb{N})$.
(b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + (-1)^{n+1} n^2 \ \ (n \in \mathbb{N})$.
(c) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + (2n+1)3^{n-1} \ \ (n \in \mathbb{N})$. Sugerencia: usar i) y el ejercicio 6.

iii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = n^3$ y, usando esto, calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$.

Sugerencia: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=1}^{n}(3i^2 + 3i + 1)$

iv) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + n \cdot n! \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = n!$ y, usando esto, calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \cdot i!$

16. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}\, a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

i) Probar que $a_n \leq \dfrac{1}{2n}\dbinom{2n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

ii) Probar que $a_n > \dfrac{1}{3^{n-1}}\dbinom{2n}{n}$ para todo $n \geq 3$

17. Para cada una de las siguientes sucesiones definidas por recursión, conjeturar una fórmula para el término general y probar su validez

i) $a_1 = 1,\ a_2 = 2, \qquad a_{n+2} = n\, a_{n+1} + 2(n+1)a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$

ii) $a_1 = 1,\ a_2 = 4, \qquad a_{n+2} = 4\sqrt{a_{n+1}} + a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$

iii) $a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\, a_i \qquad (n \in \mathbb{N})$

iv) $a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$

18. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n < 1 + 3^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2n+1}{n+2}\, a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n > n + \frac{1}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.