Álgebra 1

Segundo Cuatrimestre 2010

Práctica 1 - Conjuntos

1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas

i) $1 \in A$ ii) $\{1\} \subseteq A$ iii) $\{2\} \in A$ iv) $\{2, 1\} \subseteq A$ v) $\{1, 3\} \in A$

2. Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 11\}$ y $B = \{-1, 3 - 5, 7, -8, 11\}$, hallar $A \cap B$, $A \cup B$, $B - A$ y $A \triangle B$.

3. Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas

i) $\{3\} \subseteq A$ iii) $\{\{3\}\} \subseteq A$ v) $\emptyset \subseteq A$

ii) $\{3\} \in A$ iv) $\emptyset \in A$ vi) $\{x \in \mathbb{N} \,/\, x < 3\} \subseteq A$

4. i) Dado el conjunto referencial $V = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n$ es múltiplo de $15\}$, hallar el complemento del subconjunto A de V definido por $A = \{n \in V \,/\, n \geq 132\}$.

ii) Dado el conjunto referencial $V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\}$ y dados los subconjuntos $A = \{1, -2, 7, 3\}$, $B = \{1, \{3\}, 10\}$ y $C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$ hallar

(a) $A \cap (B \triangle C)$ (b) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$ (c) $A^c \cap B^c \cap C^c$

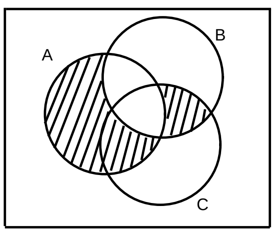
5. En un grupo de 110 alumnos hay 63 alumnos que estudian inglés, 30 que estudian alemán y 50 que estudian francés. Se sabe que 7 estudian los tres idiomas, 30 solo estudian inglés, 13 solo estudian alemán y 25 solo estudian francés. ¿Cuántos alumnos estudian exactamente dos idiomas? ¿Cuántos inglés y alemán pero no francés? ¿Cuántos estudian francés?

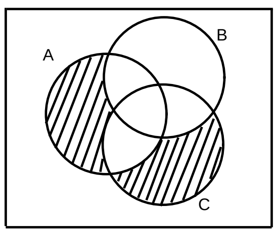
6. Sean A, B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn

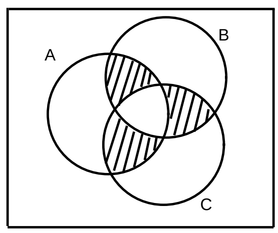
i) $A \cap (B \cup C)$ iii) $(A \cup B^c) \cap C$ v) $A \cup (B \triangle C)$

ii) $A \cup (B \cap C)$ iv) $A \triangle (B \cup C)$ vi) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

7. Encontrar fórmulas que describan las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.

i) 

ii) 

iii) 

8. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los conjuntos A, B y C y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

i) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$

ii) $C \subseteq A \Rightarrow B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c$

iii) $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

iv) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$

9. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial V. Probar que

i) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

ii) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

iii) $A - (A \triangle B) = A \cap B$

iv) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$

v) $A \subseteq B \Rightarrow A \triangle B = B \cap A^c$

vi) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

vii) $C \subseteq A$
$\Rightarrow (A \cup B) \cap C^c = (B - C) \cup (A \triangle C)$

viii) $A \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cap (B \triangle C) = A \cap B$

10. i) Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los casos

(a) $A = \{1\}$ (c) $A = \{1, \{1, 2\}\}$ (e) $A = \{1, 3, 5, \emptyset\}$

(b) $A = \{a, b\}$ (d) $A = \{1, a, \{-1\}\}$ (f) $A = \emptyset$

ii) ¿Qué relación existe entre la cantidad de elementos de A y la de su conjunto de partes?

iii) Sean A y B conjuntos. Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$.

11. i) Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar $A \times A$, $A \times B$, $(A \cap B) \times (A \cup B)$.

ii) Sean A, B y C conjuntos. Probar que

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

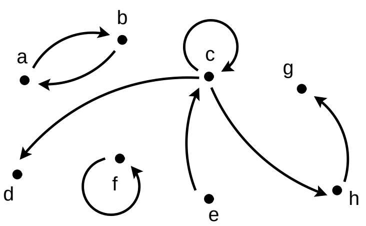
(b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

(c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

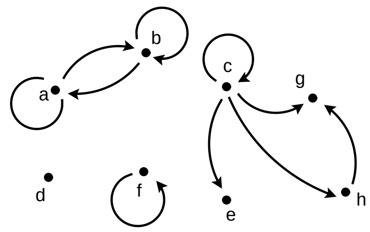
(d) $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$

12. Si A es un conjunto con n elementos y B es un conjunto con m elementos, ¿cuántos elementos tiene $A \times B$? ¿Cuántas relaciones de A en B hay? ¿Y de B en A?

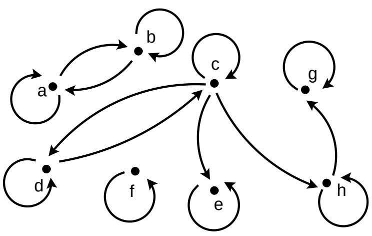
13. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.



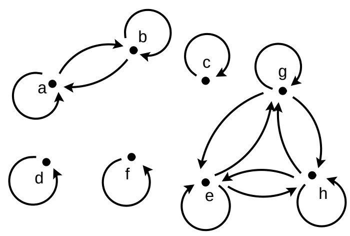
i)



iii)

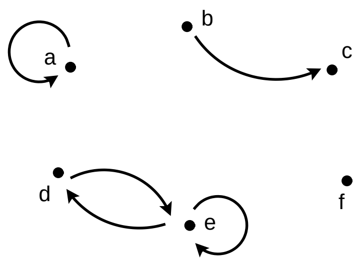


ii)



iv)

14. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea $\mathcal{R}$ la relación en A representada por el gráfico



Hallar la mínima cantidad de pares que se deben agregar a $\mathcal{R}$ de manera que la nueva relación obtenida sea

i) reflexiva
ii) simétrica
iii) transitiva
iv) reflexiva y simétrica
v) simétrica y transitiva
vi) reflexiva y transitiva
vii) de equivalencia

15. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathcal{R}$ en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (2, 5), (1, 5)\}$
iv) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, a + b$ es par$\}$
v) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, |a| \leq |b|\}$
vi) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ definida por $a \,\mathcal{R}\, b \;\Leftrightarrow\; b$ es múltiplo de a
vii) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R}$ definida por $X \,\mathcal{R}\, Y \;\Leftrightarrow\; X \cap \{1, 2, 3\} \subseteq Y \cap \{1, 2, 3\}$

16. Sea A un conjunto. Describir todas las relaciones en A que son a la vez

i) simétricas y antisimétricas,
ii) de equivalencia y de orden.

¿Puede una relación en A no ser ni simétrica ni antisimétrica?

17. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la relación de equivalencia en A

$$\mathcal{R} = \{(a, a),(b, b),(c, c),(d, d),(e, e),(f, f),(a, b),(b, a),(a, f),(f, a),(b, f),(f, b),(c, e),(e, c)\}$$

hallar

i) la clase de b
ii) la clase de c
iii) la clase de d
iv) la partición asociada a $\mathcal{R}$

18. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición $\{\{1, 3\}, \{2, 6, 7\}, \{4, 8, 9, 10\}, \{5\}\}$.

19. Hallar todas las particiones del conjunto $A = \{1, 2, 3\}$. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A?

20. Determinar si $\mathcal{R}$ es una función de A en B en los casos

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, c), (3, d)\}$
ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b)\}$
iii) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \,/\, a = 2b - 3\}$
iv) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, a + b$ es divisible por $5\}$

21. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y para las que no sean sobreyectivas hallar la imagen.

i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^2 - 5$

ii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^3 - 5$

iii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y$

iv) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x) = (2x, x^2, x - 7)$

v) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

vi) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} n - 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 2n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

vii) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(a, b) = 3a - 2b$

viii) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(a) = \begin{cases} 2a & \text{si } a > 0 \\ 1 - 2a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$

22. i) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad f(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ es divisible por } 6 \\ 3n + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad g(n, m) = n.(m + 1)$$

calcular $(f \circ g)(3, 4)$, $(f \circ g)(2, 5)$ y $(f \circ g)(3, 2)$.

ii) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 7 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 7 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g(n) = \sqrt{n}$$

Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tal que

(a) $(f \circ g)(n) = 13$

(b) $(f \circ g)(n) = 15$

23. Hallar $f \circ g$ en los casos

i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x^2 - 18$
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x + 3$

ii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 3$
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = 2x^2 - 18$

iii) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} n - 2 & \text{si } n \text{ es divisible por } 4 \\ n + 1 & \text{si } n \text{ no es divisible por } 4 \end{cases}$
$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad g(n) = 4n$

iv) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(x) = (x + 5, 3x)$
$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(n) = \sqrt{n}$

24. Hallar dos funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tales que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, donde $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ denota la función identidad.

25. Sean A, B y C conjuntos. Probar que si $f : B \longrightarrow C$ y $g : A \longrightarrow B$ son funciones entonces valen

i) si $f \circ g$ es inyectiva entonces g es inyectiva.

ii) si $f \circ g$ es sobreyectiva entonces f es sobreyectiva

iii) si f y g son inyectivas entonces $f \circ g$ es inyectiva

iv) si f y g son sobreyectivas entonces $f \circ g$ es sobreyectiva

v) si f y g son biyectivas entonces $f \circ g$ es biyectiva