1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA:

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2010
Final – 28/12/2010

---

1. Sea $a \in \mathbb{N}$ impar, y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números naturales definida por

$$\begin{cases} x_1 = 2\,a \\ x_{n+1} = 2\,x_n + 5\,a \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   a) Probar que para todo $n \geq 2$ se tiene $a \mid x_n$ y $2 \nmid x_n$.
   b) Deducir el valor de $(x_1 : x_n)$ para todo $n \geq 2$.

---

2. Dado $n \in \mathbb{N}$,

   a) calcular
$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}.$$
   b) probar que
$$2^n \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n.$$

---

3. Sean w una raíz primitiva de orden 14 de la unidad y $z = \cos\frac{2\pi}{10} + i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{10}$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales $w^{2n} \in \mathbb{R}_{>0}$ y $z^{n+2} \in \mathbb{R}_{<0}$ simultaneamente.

---

4. Sea p un primo positivo y
$$f = x^{p^3} - 2x^{p^2} + x^p + p + 1.$$
   a) Probar que $f(a)$ es congruente a 1 modulo p para todo $a \in \mathbb{Z}$.
   b) Probar que f no tiene raíces racionales.

---

5. Sea $f \in \mathbb{C}[X]$ y sea $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de multiplicidad exactamente 3 de f. Probar que el resto de dividir a f' por $(x-\alpha)^3$ es de la forma $c(x-\alpha)^2$ donde c es una constante no nula.

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen