Práctica 6

1. Calcular las siguientes integrales iteradas:

   (a) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-2}^{2} y+3\,dy\right)dx, \qquad \int_{-2}^{2}\left(\int_{-1}^{1} y+3\,dx\right)dy.$

   (b) $\int_{-1}^{2}\left(\int_{4}^{5} x+3\,dy\right)dx, \qquad \int_{4}^{5}\left(\int_{-1}^{2} x+3\,dx\right)dy.$

2. Calcular las siguientes integrales:

   (a) $\int_Q x^2y(2x+y+1)\;dx\,dy,$ donde $Q=[-2,3]\times[7,8]$.

   (b) $\int_Q \cos^2 x\,\sin^2 y\;dx\,dy,$ donde $Q=[0,\pi]\times[0,\pi]$.

   (c) $\int_Q |x^2-y^2|\;dx\,dy,$ donde $Q=[0,1]\times[0,1]$.

   (d) $\int_Q \sqrt{|x-y^2|}\;dx\,dy,$ donde $Q=[0,4]\times[-1,1]$.

3. Calcular las siguientes integrales iteradas y dibujar las regiones determinadas por los límites de integración:

   (a) $\int_0^1\int_1^{e^x}(x+y)\;dy\,dx.$

   (b) $\int_0^1\int_{x^3}^{x^2} y\;dy\,dx.$

   (c) $\int_{-1}^1\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\;dy\,dx.$

4. En las integrales siguientes, cambiar el orden de integración, dibujar las regiones correspondientes y evaluar la integral por ambos caminos.

   (a) $\int_0^1\int_x^1 xy\;dy\,dx.$

   (b) $\int_0^1\int_{2x}^{3x} x^2y\;dy\,dx.$

   (c) $\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\cos\theta\;dr\,d\theta.$

5. (a) Sea D la región acotada por los semiejes positivos y la recta $3x+4y=10$. Calcular
   $$\int_D x^2+y^2\;dx\,dy.$$

   (b) Sea D la región acotada por el eje y y la parábola $x=-4y^2+3$. Calcular
   $$\int_D x^3y\;dx\,dy.$$

6. Calcular el área de:

   (a) la región limitada por la recta $y=x$ y por la curva $y=x^2$.

   (b) la región formada por todos los puntos (x,y) tales que $|x|+|y|\leqslant a,\ a\geqslant 0$.

(c) la región formada por todos los puntos (x,y) tales que $x \geqslant 0,\ x^2+y^2 \leqslant 2,\ x^2+y^2 \geqslant 1$.

7. Calcular

   (a) $\int_C xyz + x^2y^2z^2\ dx\,dy\,dz, \quad C = [0,1]\times[-3,2]\times[-1,1]$.

   (b) $\int_C x\cos z + y\cos x + z\cos y\ dx\,dy\,dz, \quad C = [0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,\pi]$.

8. Calcular

   (a) $\int_W x\,dx\,dy\,dz$, siendo W la región limitada por $x=0,\ y=0,\ z=2,\ z=x^2+y^2$.

   (b) $\int_0^1\int_0^{2x}\int_{x+y}^{x^2+y^2} dz\,dy\,dx$.

   (c) $\int_W x+y+z\ dx\,dy\,dz$, siendo $W = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\| \leqslant 1\}$.

9. (a) Sean $D^* = (0,1]\times(0,2\pi]$ y $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Determinar el conjunto imagen $D = T(D^*)$. Mostrar que T es inyectiva en D^*.

   (b) Sea D^* el paralelogramo acotado por las rectas $y = 3x-4,\ y = 3x,\ y = \frac{1}{2}x$ e $y = \frac{1}{2}x+2$. Sea $D = [0,1]\times[0,1]$. Encontrar una transformación T tal que $D = T(D^*)$.

10. (a) Sean $D^* = [0,1]\times[0,1]$ y $T : D^* \to \mathbb{R}^2,\ T(u,v) = (-u^2+4u, v)$. Encontrar $D = T(D^*)$. ¿Es T inyectiva? ¿Conserva las áreas?.

    (b) Comprobar que la sustitución $x = u-uv,\ y = uv$ transforma el cuadrado unidad $0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1$ en el triángulo $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x$.

11. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\rho,\phi,\theta) = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi).$$

    Sea $D^* = [0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$. Encontrar $T(D^*)$. ¿Es T inyectiva? Si no lo es, ¿se puede eliminar algún subconjunto de D^* de tal forma que T sea inyectiva en el resto?

12. Calcular los jacobianos de las transformaciones dadas en los tres ejercicios anteriores.

13. Considerar la aplicación lineal definida por: $u = y-x,\ v = x+y$.

    (a) Calcular su jacobiano.

    (b) Sea Δ el triángulo determinado por la recta $x+y=2$ y los ejes coordenados. Estudiar y representar su imagen en el plano uv.

    (c) Calcular el área de Δ en el plano xy y de su imagen en el plano uv mediante integrales dobles.

    (d) Comparar los resultados obtenidos en el ítem anterior.

    (e) Calcular la siguiente integral mediante el cambio de coordenadas definido antes:

$$\int_\Delta e^{\frac{y-x}{y+x}} dx\,dy.$$

14. Sea $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

(a) Hallar D^* tal que $T(D^*) = D$, donde D es la región del primer cuadrante encerrada por los círculos $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$ $(0 < a < b)$.

(b) Usar el ítem anterior para calcular $\int_D \ln(x^2 + y^2)\; dx\, dy$.

15. Sea D el disco unitario de $\mathbb{R}^2$. Calcular $\int_D e^{x^2+y^2} dx\, dy$ mediante un cambio de variables a coordenadas polares.

16. Calcular el volumen de:

    (a) la región encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y los planos $z = 0$ y $z = 10$.

    (b) la región determinada por $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 10$, $z \geqslant 2$.

    (c) la región acotada por $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 9 - x^2$.

17. Verificar, usando integrales triples, que el volumen de la esfera de radio a es $\frac{4}{3}\pi a^3$.

18. (a) Mediante un cambio de variables conveniente, transformar la región $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ en la región $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

    (b) Usando la parte anterior y el cambio a coordenadas polares, calcular el área de la elipse con semiejes a y b.

    (c) Calcular el volumen del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

19. Aplicando la transformación $x + y = u$, $y = uv$, calcular

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}} dy\, dx.$$

20. Calcular las siguientes integrales dobles

    (a) $\displaystyle\int_D (x^2 + y^2)^{3/2} dx\, dy$ donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leqslant 4\}$

    (b) $\displaystyle\int_D (x - y)^2 e^{x-y} dx\, dy$ donde D es el dominio acotado por las rectas: $x + y = 1$, $x + y = 4$, $x - y = 1$ y $x - y = -1$

    (c) $\displaystyle\int_D (1 + x^2 + y^2)^{3/2} dx\, dy$ donde D es el disco unitario

    (d) $\displaystyle\int_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} dx\, dy$ donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\ ,\ x \geqslant 0\ ,\ y \geqslant 0\}$

21. Calcular las siguientes integrales triples

    (a) $\displaystyle\int_A z e^{x^2+y^2} dx\, dy\, dz$ donde $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leqslant 4\ ,\ 2 \leqslant z \leqslant 3\}$

    (b) $\displaystyle\int_A \frac{dxdydz}{x^2 + y^2 + z^2}$ donde $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4\}$

    (c) $\displaystyle\int_A z\; dx\, dy\, dz$ donde $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3\ ,\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}\}$