Matemática 4 - Análisis Matemático III

---

1. (a) Clasificar todas las singularidades en $\mathbb{C}_\infty$ de

$$f(z) = \frac{z^4}{(z^2+1)^2(z-9)}.$$

   (b) Chequear que la suma de todos los residuos, incluídos el del infinito, es cero.

2. (a) Sea f la función 2π-periódica que en el intervalo $[-\pi, \pi)$ se define como

$$\begin{cases} x+\pi & -\pi \leq x < 1 \\ 0 & -1 \leq x < 1 \\ -x-\pi & 1 \leq x < \pi. \end{cases}$$

   Calcular su serie de Fourier trigonométrica y estudiar la convergencia puntual de dicha serie.

   (b) A partir de la serie hallada anteriormente, demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}((-1)^n - \cos(n) + n(\pi-1)\sin(n)) = \frac{1+\pi^2-2\pi}{4}$$

3. Transformando Laplace, resolver para $t > 0$

$$y'(t) - 4\int_0^t e^{t-x} y(x)\, dx - y(t) = e^{-t}, \quad y(0) = 0.$$

4. Resolver la ecuacón del calor para $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$ dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x},$$

de forma tal que $u(x,0) = e^{-x^2}$. *Sugerencia:* Considerar la transformada de Fourier de la ecuación respecto a la variable x.

Matemática 4 - Análisis Matemático III

---

1. (a) Clasificar las singularidades en $\mathbb{C}$ de

$$f(z) = \frac{z}{\operatorname{sen}^2(z)(z-2)}.$$

   (b) Calcular mediante residuos la integral

$$\int_C f(z)\, dz,$$

   donde C es la circunferencia de centro 0 y radio 3 recorrida una vez en sentido positivo.

2. (a) Sea f la función 2π-periódica que en el intervalo $[-\pi, \pi)$ se define como

$$f(z) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < -1, \\ 1 & -1 \leq x < 1, \\ x & 1 \leq x < \pi. \end{cases}$$

   Calcular su serie de Fourier trigonométrica y estudiar la convergencia puntual de dicha serie.

   (b) A partir de la serie hallada en el item anterior, demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - \cos(n)}{n^2} = -\frac{(\pi-1)^2}{4}$$

3. Usando la igualdad de Plancherel-Parseval para transformada de Fourier, probar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(2t)}{t^2} = \pi.$$

4. Resolver transformando Laplace en la variable t:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 4\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = 3e^{-2x} \end{cases}$$

Matemática 4 - Análisis Matemático III

---

1. Encontrar todos los posibles de sarrollos de Laurent alrededor de $z_0 = 0$ de la función
$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-3)} + e^{1/z^2}.$$

2. (a) Sea f la función 2π-periódica que en el intervalo $[-\pi, \pi)$ se define como
$$f(z) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < -1, \\ -x & -1 \leq x < 0, \\ x & 0 \leq x < 1, \\ 0 & 1 \leq x < \pi. \end{cases}$$
Calcular su serie de Fourier trigonométrica y estudiar la convergencia puntual de dicha serie.

   (b) A partir de la serie hallada en el item anterior, demostrar que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - \cos(n)}{n^2} = -\frac{(\pi-1)^2}{4}$$

3. Resolver la siguiente ecuación usando transformada de Laplace
$$\begin{cases} x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 4e^{2t} \\ x(0) = -3, \quad x'(0) = 1. \end{cases}$$

4. Resolver la siguiente ecuación utilizando la transformada de Fourier en la variable x
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$
para $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}$.