

- d) Si α es una contingencia, ¿es β una contingencia?
7. Un conjunto de conectivos se dice *adecuado* si toda tabla de verdad puede representarse con una fórmula construida utilizando sólo conectivos de dicho conjunto.
- a) Probar que son adecuados los conjuntos $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ y $\{\neg, \rightarrow\}$.
- b) Demostrar que no son adecuados $\{\neg\}$, $\{\vee, \wedge\}$ y $\{\vee, \rightarrow\}$.
8. Hallar todas las valuaciones v con $v(\alpha) = 1$ y $v(p_i) = 0$ para $p_i \notin \text{Var}(\alpha)$ si:
- a) $\alpha = ((\neg p_1) \rightarrow (p_3 \vee p_4))$,
- b) $\alpha = (\neg(p_2 \rightarrow (p_3 \wedge p_1)))$,
- c) $\alpha = (((\neg p_2) \rightarrow p_3) \rightarrow (p_2 \vee (p_5 \rightarrow p_3)))$.
- ¿Cuántas valuaciones hay en cada caso? ¿Y si se elimina la condición de que $v(p_i)$ sea cero para toda p_i que no aparezca en α ?
9. Construir las tablas de verdad correspondientes a las fórmulas:
- a) el *o exclusivo* (XOR) de p_1 y p_2 ,
- b) $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1))$,
- c) $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((\neg p_2) \rightarrow (\neg p_1)))$.
10. Sea $\alpha \in \text{Form}$ tal que para toda $p_i \in \text{Var}(\alpha)$ resultan ser $(\alpha \vee p_i)$ una tautología y $(\alpha \wedge p_i)$ una contradicción. Probar que en α aparece sólo una variable proposicional.
11. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \text{Form}$ y sea \sim la relación binaria en Val definida por

$$v_1 \sim v_2 \text{ si y sólo si } v_1(\alpha_i) = v_2(\alpha_i) \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

- a) Probar que \sim es una relación de equivalencia en Val .
- b) Probar que el conjunto cociente Val / \sim tiene a lo sumo 2^k elementos.
12. Sea $\alpha \in \text{Form}$ tal que \vee es el único conectivo que figura en α . Probar que existe una fórmula γ equivalente a α y tal que \rightarrow es el único conectivo binario que figura en γ .
13. Sea Form / \equiv el conjunto cociente para la relación de equivalencia semántica y notemos $[\alpha]$ a la clase de una fórmula α . Definimos en Form / \equiv la siguiente relación:

$$[\alpha] \leq [\beta] \text{ si y sólo si } \alpha \rightarrow \beta \text{ es una tautología.}$$

- a) Probar que Form / \equiv es infinito y que \leq está bien definida, es decir, que si $[\alpha] = [\gamma]$ y $[\beta] = [\delta]$ entonces $[\alpha] \leq [\beta]$ si y sólo si $[\gamma] \leq [\delta]$.
- b) Probar que \leq es una relación de orden en Form / \equiv .
- c) Sean \wedge^* , \vee^* , \neg^* definidas por

$$[\alpha] \wedge^* [\beta] = [\alpha \wedge \beta], \quad [\alpha] \vee^* [\beta] = [\alpha \vee \beta] \quad \text{y} \quad \neg^*[\alpha] = [\neg \alpha].$$

Probar que \wedge^* , \vee^* y \neg^* están bien definidas y que $[\alpha] \leq [\beta]$ si y sólo si $[\alpha] = [\alpha] \wedge^* [\beta]$ si y sólo si $[\alpha] \vee^* [\beta] = [\beta]$.

- d) Probar que si α es una tautología y β es una contradicción, entonces para toda fórmula γ se cumplen las siguientes propiedades:

$$i) [\beta] \leq [\gamma] \leq [\alpha], \quad ii) [\gamma] \vee^* \neg^*[\gamma] = [\alpha], \quad iii) [\gamma] \wedge^* \neg^*[\gamma] = [\beta].$$

Comentario: el conjunto Form / \equiv se conoce como el *álgebra de Lindenbaum* del cálculo proposicional y resulta ser un álgebra de Boole con el orden \leq definido arriba.

14. Si α y β son fórmulas, se define $\alpha|\beta$ como $((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))$, conocida como barra de Sheffer (NAND); y se define $\alpha \downarrow \beta$ como $((\neg\alpha) \wedge (\neg\beta))$, barra de Nicod (NOR).
- Construir las tablas de verdad de $\alpha|\beta$ y $\alpha \downarrow \beta$.
 - Mostrar que $\{|\}$ y $\{\downarrow\}$ son adecuados.
15. Sea \mathcal{L} el lenguaje del cálculo proposicional y consideremos $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{\perp\}$, donde \perp es un conectivo 0-ario caracterizado por $v(\perp) = 0$ para toda $v \in \text{Val}$.
- Probar que $\{\perp, \rightarrow\}$ es adecuado.
 - Si en lugar de agregar \perp , le agregamos a \mathcal{L} un conectivo 0-ario \top caracterizado por $v(\top) = 1$ para toda $v \in \text{Val}$, ¿qué podría decirse de $\{\top, \rightarrow\}$?