

Análisis 1 - Alimentos - 1° cuatrimestre 2021 (virtual)

PRÁCTICA 3

CONJUNTOS EN LA RECTA, EL PLANO Y EL ESPACIO

Subconjuntos de la recta

1. Hallar el conjunto $S \subset \mathbb{R}$ de soluciones de las siguientes ecuaciones. En cada caso hallar (si tiene) el supremo e ínfimo, y el máximo y mínimo de S .

a) $|x + 3| < 1$

b) $|3x - 1| < |x - 1|$

c) $|x - 3| \geq 1$

d) $x^2 > |x + 3|$

e) $\left| \frac{x-2}{3x+1} \right| \leq 1$

f) $|x - 3| < 2 - x$

g) $0 < x^2 \leq x^3$

h) $|x + 3| + |x - 9| > 2$

i) $||x + 2| - |x - 1|| < 1$

2. Decidir cuáles de los conjuntos del ejercicio anterior son abiertos, cuáles cerrados, cuales no son ninguna de las dos cosas.
3. Sean a y b números reales. Decidir para qué valores de a y de b son válidas cada una de las siguientes afirmaciones

a) $a < a^2$

b) $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$

c) $a > 0 \Rightarrow ab \geq b$.

d) $a + b \geq \max\{a, b\}$

4. Determinar si los siguientes conjuntos poseen supremo, ínfimo, máximo y mínimo. En caso de poseerlos, calcularlos:

a) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ y } 20 < n \leq 35 \right\}$

b) $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

c) $A = \left\{ \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$

d) $A = \left\{ \frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Subconjuntos del plano y el espacio

5. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones en \mathbb{R}^2 . Representar las soluciones en el plano.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \leq 2\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| > 2\}$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 3\}$

f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| + |y + 1| \geq 1\}$

g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} = 1\}$

h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} < 1\}$

6. Mostrar que los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 son abiertos

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 7\}$;

- b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y > 1\}$;
 c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \vee y \neq 0\}$.

7. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 son compactos (cerrados y acotados):

- a) $A = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;
 b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
 c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$;
 d) $A = \left\{ \left(0, \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$;
 e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge y = 0\}$.

8. Representar gráficamente los siguientes conjuntos A ; decidir cuáles son abiertos, cuáles cerrados y cuáles ninguna de las dos cosas. De los cerrados, ¿cuáles son compactos?

- a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + (y - 1)^2 \leq 3\}$
 b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < 5x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1, |y| \leq \sqrt{5}\}$
 c) $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - \frac{y^2}{4} < 1 \right\}$
 d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge (0 \leq z \leq 1/2) \wedge (x + y + z < 1)\}$
 e) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z \geq 0) \wedge (x^2 + y^2 + z^2 \leq 1)\}$

9. Caracterizar (gráfica o analíticamente) los conjuntos A° , $bd(A)$, \bar{A} , $\bar{A} \setminus A$ y $A \setminus bd(A)$, para los conjuntos A que aparecen en los Ejercicios 8 y 7.

10. Dar el dominio de definición para cada una de las siguientes funciones y dibujarlo. Decidir cuáles dominios son abiertos o cerrados:

- a) $f(x, y) = \ln(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)$ b) $f(x, y) = \sqrt{6 - (2x + 3y)}$
 c) $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^{-1/2} + \sqrt{y - x^2}$ d) $f(x, y) = 1/x$
 e) $f(x, y) = \frac{\ln(1 - y + x^2)}{\operatorname{sen} x}$ f) $f(x, y) = \int_x^y \frac{1}{1 + t^2} dt$
 g) $f(x, y) = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}}$ h) $f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 y)}{\ln(1 - x^2)}$

11. Hacer un gráfico aproximado de cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

cambiando de coordenadas cuando sea necesario.

- a) $f(x, y) = 1 - x - y$ b) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$
 c) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ d) $f(x, y) = x^2$
 e) $f(x, y) = 2xy$ f) $f(x, y) = 4x^2 - 3y^2$
 g) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$ h) $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy$
 i) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy$ j) $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 4xy$

12. Estudiar las superficies de \mathbb{R}^3 representadas por las siguientes ecuaciones y determinar cuáles de estas superficies son la gráfica de una función $z = f(x, y)$.

- a) $z = 2x^2 + y^2$ b) $z^2 = 1 - x^2 - \frac{y^2}{2}$ c) $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$
 d) $x^2 + y^2 = 4z^2$ e) $z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} - 2$ f) $6x^2 + y^2 - z^2 = 1$

13. Para distintos valores de c dibujar las curvas de nivel $\{(x, y) : f(x, y) = c\}$.

- a) $f(x, y) = x + y$ b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ c) $f(x, y) = \sqrt{xy}$
 d) $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$ e) $f(x, y) = x^2 - y^2$ f) $f(x, y) = xy$
 g) $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$ h) $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$ i) $f(x, y) = |x - 1| + |y|$.

14. Para distintos valores de w graficar la superficie de nivel $\{(x, y, z) : f(x, y, z) = w\}$.

- a) $f(x, y, z) = x + y + z$ b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$
 c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ d) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2$
 e) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$ f) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z$
 g) $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 - z^2$ h) $f(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + 3z^2$

15. Hacer un dibujo aproximado de las siguientes superficies en \mathbb{R}^3 , llevando la función cuadrática a su forma canónica

- a) $2xy - z = 0$ b) $z = 2x^2 + 2y^2 - 2xy$ c) $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2yz = 1$
 d) $z = x^2 + y^2 + 2xy$ e) $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 1 + z^2$ f) $2x^2 + 2xy + 2y^2 = z^2 - 1$
 g) $x^2 = 2xy - 2xz - 2yz$ h) $2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz = 2$ i) $4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz = 1$