- Definición: un conjunto X es *numerable* si hay una biyección $\mathbb{N} \to X$. Un conjunto es contable si es finito o numerable.
- Observación: todo subconjunto de $\mathbb{N}$ es contable.
- Corolario: todo subconjunto de un conjunto contable es contable.
- Observación: Un conjunto X es contable si hay una función inyectiva $X \to \mathbb{N}$.
- Observación: Un conjunto no vacío X es contable si y solo si hay una función sobreyectiva $\mathbb{N} \to X$.
- Proposición: $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^i$ es numerable
- Demostración: La función $f\colon \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^i \to \mathbb{N}$, definida por
$$f(x_1, \ldots, x_i) = p_1^{x_1} \cdots p_i^{x_i},$$
donde $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$ es la sucesión de los números primos, es inyectiva.
- Corolario: Una unión contable $\bigcup_{i\in I} X_i$, de conjuntos contables, es contable. Además, $\bigcup_{i\in I} X_i$ es numerable si y solo si algún X_i es infinito o $\{i \in I : X_i \neq \emptyset\}$ es infinito.
- Corolario: si $X_1, \ldots x_n$ son contables, entonces $X_1 \times \cdots \times X_n$ es contable.
- Ejemplos: 1) $\mathbb{Z}$ es numerable, 2) $\mathbb{Q}$ es numerable, 3) $\mathbb{Z}[X]$ es numerable.
- Definición: un número real es *algebraico* si es raíz de un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Un número es trascendente si no es algebraico.
- Ejemplo: el conjunto de los números algebraicos es numerable.
- Teorema: $\mathbb{R}$ no es numerable.
- Corolario: hay una cantidad no numerable de números trascendentes.
- Definición: el *cardinal* de un conjunto A es un objeto $|A|$ con la propiedad de que $|A| = |B|$ si y solo si hay una función biyectiva $f\colon A \to B$.
- Ejemplo: el primer cardinal no finito es $|\mathbb{N}|$. Este cardinal es denotado $\aleph_0$. Un conjunto A satisface $|A| = \aleph_0$ si y solo si A es numerable. El cardinal de $\mathbb{R}$ es denotado con c y llamado cardinal del continuo.
- Teorema: sea A un conjunto y sea $P(A)$ el conjunto de partes de A. No hay ninguna función sobreyectiva de A en $P(A)$.
- Teorema: para cada conjunto A hay una función biyectiva $P(A) \to \{0,1\}^A$ (B^A denota el conjunto de funciones de A en B).
- Al definir exponenciación de cardinales veremos que esto justifica escribir $|P(A)| = 2^{|A|}$.
- Definición: sean a y b números cardinales y sean A y B conjuntos tales $|A| = a$ y $|B| = b$. Decimos que a es *menor o igual* que b, y escribimos $a \leq b$ si hay una función inyectiva $f\colon A \to B$. Decimos que a es menor que b, y escribimos $a < b$, si $a \leq b$ y $a \neq b$.
- La relación $\leq$ es reflexiva y transitiva.
- Teorema: si existen funciones inyectivas $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$, entonces existe una función biyectiva $h\colon A \to B$.
- Corolario: la relación $\leq$ es antisimétrica.
- Observación: hay infinitos cardinales infinitos.
- Lema de Zorn: si L es un conjunto parcialmente ordenado en el que cada cadena tiene una cota superior, entonces L tiene elementos maximales.
- Un orden total $\leq$ sobre X es un buen orden si todo subconjunto $Y \subseteq X$ tiene elemento mínimo.
- Principio de buena ordenación: todo conjunto puede ser bien ordenado.
- Axioma de elección: dado un conjunto no vacío I y una familia de conjuntos $(X_i)_{i\in I}$ hay una función $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ tal que $f(i) \in X_i$ para todo $i \in I$

- Teorema: Dados conjuntos X e Y, $|X| \leq |Y|$ o $|Y| \leq |X|$.
- Corolario: $\leq$ es un orden total.
- Definición de suma de cardinales
- Observación: 1) $(a+b)+c = a+(b+c)$, 2) $a+b = b+a$, 3) $a+0 = 0+a = a$.
- Proposición: todo conjunto infinito se expresa cono unión disjunta de conjuntos numerables.
- Para cada cardinal infinito a vale que $a+a = a$.
- Corolario: Sean a y b cardinales, con b infinito. Si $a \leq b$, entonces $b \leq a+b \leq b+b = b$. Por lo tanto, $a+b = b$.
- Definición de multiplicación de cardinales.
- Observación: 1) $(ab)c = a(bc)$, 2) $ab = ba$, 3) $a0 = 0a = 0$, 4) $a1 = 1a = a$.
- Teorema: si d es un cardinal infinito, entonces $dd = d$.
- Corolario: si d y e son cardinales con $d \neq 0$ y e infinito, entonces $e \leq de \leq ee \leq e$. En consecuencia, $e = de = ee$.
- Definición de exponenciación de cardinales
- Observación: 1) $a^0 = 1$ para todo a, 2) $0^a = 0$ si $a > 0$, 3) $1^d = 1$ para todo d, 4) si d es infinito y n es finito, entonces $d^n = d$.
- Proposición: $2^{\aleph_0} = c$.
- Proposición: dados conjuntos A, B y C con $B \cap C = \emptyset$ hay biyecciones canónicas
$$(A \times B)^C \to A^C \times B^C, \quad A^{B \cup C} = A^B \times A^C \quad \text{y} \quad (A^B)^C \to A^{B \times C}.$$
- Corolario: para cada terna de números cardinales a, b y c vale que 1) $(ab)^c = a^c b^c$, 2) $a^{b+c} = a^b a^c$ y 3) $(a^b)^c = a^{bc}$
- Proposición: dados cardinales a y b, con b infinito y $2 \leq a \leq 2^b$, es cierto que $a^b = 2^b$.
- Ejemplos: 1) $n^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, para todo número natural $n \geq 2$; 2) $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.