Práctica 5

Ejercicio 1. Probar que $\mathbb{R}^n$ (con la distancia euclídea) es separable.

Ejercicio 2. Sea $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \;/\; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Se define en c_0 la métrica

$$d(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| \;/\; n \in \mathbb{N}\}.$$

Probar que (c_0, d) es un espacio métrico separable.

Ejercicio 3. Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ un subconjunto denso. Probar que si A es separable, entonces X es separable.

Ejercicio 4. Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que una familia $\mathcal{A} = (U_j)_{j\in J}$ de abiertos de X es una *base de abiertos de* X si todo abierto de X se puede escribir como unión de miembros de $\mathcal{A}$. Probar que $\mathcal{A}$ es una base de abiertos de X si y sólo si verifica la siguiente condición: "Para todo abierto G de X y para todo $x \in G$ existe $j \in J$ tal que $x \in U_j \subseteq G$".

Ejercicio 5. Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que son equivalentes:

i) X es separable

ii) X posee una base contable de abiertos

iii) Todo cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento contable.

Ejercicio 6. Probar que todo subespacio de un espacio métrico separable es separable.

Ejercicio 7. Sea (X,d) un espacio métrico separable. Probar que toda familia de subconjuntos de X no vacíos, abiertos y disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable. Deducir que el conjunto de puntos aislados de X es a lo sumo numerable.

Ejercicio 8. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞ definida por

$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d(x_1,x_2), d'(y_1,y_2)\}.$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es separable si y sólo si (X,d) e (Y,d') son separables.

Ejercicio 9. ¿Es el espacio (ℓ_∞, d_∞) separable?

Ejercicio 10. Sean X, Y espacios métricos. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva. Probar que si X es separable, entonces Y es separable. ¿Se puede reemplazar la hipótesis de sobreyectividad por otra más débil manteniendo la conclusión?

Ejercicio 11. Sea $X = \mathbb{R} - \{0\}$ con la métrica usual de $\mathbb{R}$, y sea $f : X \to X$ dada por $f(x) = \frac{1}{3}x$. Probar que f es una contracción pero no tiene punto fijo. ¿Qué falla del Teorema de Banach?

Ejercicio 12.

i) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que f tiene a lo sumo un punto fijo.

ii) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $|f'(x)| \leq \alpha < 1$. Probar que f tiene un único punto fijo.

iii) Mostrar que la función $f(x) = x + (1 + e^x)^{-1}$ satisface $0 < f'(x) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ pero no tiene puntos fijos. Explicar por qué no contradice el teorema de punto fijo.

Ejercicio 13. Considere la siguiente ecuación integral no lineal en el espacio $C([a, b], \mathbb{R})$ dada por,

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, f(y))dy + \varphi(x),$$

con $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas, tal que K satisface la condición de Lipschitz en la tercera coordenada:

$$|K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2)| \leq M|z_1 - z_2|.$$

Probar que la ecuación integral tiene solución única para todo

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b - a)}.$$

Muestre una sucesión que converja a la solución.

Ejercicio 14. Sea X un espacio métrico completo y sea $T : X \to X$ tal que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que T^n es una contracción. Entonces existe un único $x \in X$ tal que $T(x) = x$.