

PRÁCTICA 4

Ejercicio 1. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$. Probar:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ si y sólo si para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$
- ii) Si existe $x \in X$ para el cual toda subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_{k_j}} = x$, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$
- iii) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?
- iv) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces es acotada.
- v) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \in X$, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

Ejercicio 2. Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico X es un subespacio completo de X , entonces X es completo.

Ejercicio 3. Sean A y B subespacios de un espacio métrico. Probar que si A y B son completos, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son completos.

Ejercicio 4. Sea (X, d) un espacio métrico.

- i) Probar que todo subespacio completo de (X, d) es un subconjunto cerrado de X .
- ii) Probar que si X es completo, entonces todo subconjunto $F \subseteq X$ cerrado, es un subespacio completo de X .

Ejercicio 5. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞ definida por

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}.$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es completo si y sólo si (X, d) e (Y, d') son completos.

Ejercicio 6.

- i) Sea X un espacio métrico y sea $B(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es acotada}\}$. Probar que $(B(X), d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$.
- ii) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Probar que $(C[a, b], d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$.
- iii) Probar que $C_0 := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} / a_n \rightarrow 0\}$ es un espacio métrico completo con la distancia $d_\infty((a_n), (b_n)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$.

Ejercicio 7. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{D} \subset X$ un subconjunto denso con la propiedad que toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ converge en X . Probar que X es completo.

Ejercicio 8. *Teorema de Cantor.*

Probar que un espacio métrico (X, d) es completo si y sólo si toda familia $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de X cerrados, no vacíos tales que $F_{n+1} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ tiene un único punto en la intersección.

Ejercicio 9. Sea (X, d) un espacio métrico completo sin puntos aislados. Probar que X tiene cardinal mayor o igual que c .

Ejercicio 10. Sea $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ un isomorfismo uniforme (es decir, una función biyectiva, uniformemente continua, con inversa uniformemente continua). Probar que (X, d) es completo si y sólo si (Y, d') es completo.

En particular, si un espacio métrico X es completo con una métrica d entonces también lo es con cualquier otra métrica que sea uniformemente equivalente a d .

Ejercicio 11. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que un conjunto $A \subset X$ es *nunca denso* si $\overline{A}^\circ = \emptyset$. Probar que A es nunca denso si y sólo si para todo abierto no vacío $U \subset X$ existe otro abierto no vacío $V \subset U$ tal que $V \cap A = \emptyset$.

Ejercicio 12. Probar que \mathbb{R}^n no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

Ejercicio 13. Sean (X, d) un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea D un subconjunto denso y numerable de X . Probar que D no es un G_δ .

Ejercicio 14. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea continua sólo en los racionales.

Sugerencia: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} / \exists U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \text{diam}(f(U)) < \frac{1}{n} \right\}$$

Ejercicio 15. Sea $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de intervalos de $[0, 1]$ con extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n = \{ f \in C[0, 1] / f \text{ es monótona en } I_n \}.$$

- i) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es un cerrado de interior vacío en $(C[0, 1], d_\infty)$.
- ii) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ que no son monótonas en ningún subintervalo.