Práctica 2

Ejercicio 1. Se definen las funciones $d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq 5)$ por:

$$d_1(x,y) = (x-y)^2 \quad , \quad d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|} \quad , \quad d_3(x,y) = |x^2 - y^2|$$

$$d_4(x,y) = |x - 2y| \quad , \quad d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

Determinar cuáles de estas funciones son métricas en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.

i) Probar que las siguientes funciones son métricas en $\mathbb{R}^n$:

(a) $d_1(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

(b) $d_2(x,y) = \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\Big)^{1/2}$

(c) $d_\infty(x,y) = \displaystyle\sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.

ii) Para $n = 2$, dibujar las bolas abiertas $B(0,r)$ de centro $0 \in \mathbb{R}^2$ y radio r correspondientes a las tres distancias mencionadas.

Ejercicio 3. Sea X un conjunto y $\delta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Verificar que δ es una métrica y hallar los abiertos de (X, δ).
Nota: δ se llama *métrica discreta* y (X,δ) *espacio métrico discreto.*

Ejercicio 4. Sea $N : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$N(a) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } a \neq 0, \quad p^n \mid a \quad \text{y} \quad p^{n+1} \nmid a \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

donde p es un primo fijo, y sea $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(a,b) = N(a-b)$.
Probar que $(\mathbb{Z}, d)$ es un espacio métrico.

Ejercicio 5. Sea $\ell^\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ / \ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada}\}$. Se considera $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ definida por $d((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Probar que (ℓ^∞, d) es un espacio métrico.

Ejercicio 6. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, se define $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es continua } \}$. Probar que son espacios métricos:

i) $(C[a,b], d_1)$, con $d_1(f,g) = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$,

ii) $(C[a,b], d_\infty)$, con $d_\infty = \displaystyle\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$.

Ejercicio 7. Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$.

i) Probar que d' también es una métrica en X, que satisface $0 \le d'(x,y) < 1$ para todos $x, y \in X$.

ii) Probar que un subconjunto $A \subset X$ es abierto para la métrica d si y sólo si lo es para la métrica d'.

iii) Deducir que una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto x con la métrica d si y sólo si también converge a x con la métrica d'.

Ejercicio 8. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Consideremos el conjunto $X_1 \times X_2$ y la aplicación $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$.

i) Probar que d es una métrica en $X_1 \times X_2$.

ii) Probar que en el espacio métrico $(X_1 \times X_2, d)$ se cumple que una sucesión $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto (a, b) si y sólo si converge en cada coordenada, es decir si y sólo si $a_n \to a$ en (X_1, d_1) y $b_n \to b$ en (X_2, d_2).

Ejercicio 9. Sea $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos, y consideramos el producto cartesiano $X = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. El objetivo de este ejercicio es construir una métrica para X en la cual la convergencia de una sucesión equivalga a la convergencia en cada coordenada, como en el ejercicio anterior.

i) Supongamos primero que todos los X_n tienen diámetro menor o igual que 1, es decir $d_n(x,y) \le 1$ para todos $n \in \mathbb{N}$ y $x, y \in X_n$. Dados dos elementos $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X, definimos

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}.$$

Probar que d es una métrica en X.

ii) Sea $x^1, x^2, x^3, \ldots$ una sucesión de puntos de X, es decir, cada x^k es una sucesión $(x_1^k, x_2^k, \ldots)$ en la cual $x_n^k \in X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un elemento de X. Probar que, con la métrica d definida en el ítem anterior, $x^k \to x$ en X si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_n^k \to x_n$ en X_n.

iii) Mostrar cómo se puede reducir el caso general (es decir sin tener la hipótesis $\operatorname{diam}(X_n) \le 1$) al caso ya resuelto.

Ejercicio 10. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq X$.

i) Probar las siguientes propiedades del *interior* de un conjunto:

(a) $A^\circ = \bigcup_{\substack{G \text{ abierto} \\ G \subseteq A}} G$

(b) $\emptyset^\circ = \emptyset \quad \text{y} \quad X^\circ = X$

(c) $A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad A^\circ \subseteq B^\circ$

(d) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. ¿Se puede generalizar a una intersección infinita?

(e) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$. ¿Vale la igualdad?

ii) Probar las siguientes propiedades de la *clausura* de un conjunto:

(a) $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ cerrado} \\ A \subseteq F}} F$

(b) $\overline{\emptyset} = \emptyset \quad \text{y} \quad \overline{X} = X$

(c) $A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad \overline{A} \subseteq \overline{B}$

(d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ¿Se puede generalizar a una unión infinita?

(e) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

(f) $x \in \overline{A} \iff$ Existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \longrightarrow x$

iii) Probar las siguientes propiedades que relacionan interior y clausura:

(a) $(X - A)^\circ = X - \overline{A}$

(b) $\overline{X - A} = X - A^\circ$

¿Son ciertas las igualdades: $\overline{A} = \overline{A^\circ} \quad , \quad A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

iv) Probar las siguientes propiedades de la *frontera* de un conjunto:

(a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$

(b) ∂A es cerrado

(c) $\partial A = \partial(X - A)$

Ejercicio 11. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$ un conjunto numerable. Probar que $\#\overline{A} \leq c$.

Ejercicio 12. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $G \subseteq X$ abierto y $F \subseteq X$ cerrado. Probar que $F - G$ es cerrado y $G - F$ es abierto.

Ejercicio 13. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos *bola cerrada de centro a y radio r* al conjunto $\overline{B}(a, r) = \{x \in X \ / \ d(x, a) \leq r\}$.

i) Probar que $\overline{B}(a, r)$ es un conjunto cerrado y que $\overline{B(a, r)} \subseteq \overline{B}(a, r)$.

ii) Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a, r)$ cuya clausura no sea $\overline{B}(a, r)$.

Ejercicio 14. Sean (X, d) un espacio métrico, p un punto de X y a, b números reales tales que $0 < a < b$. Probar que:

i) $\{x \in X \ / \ a < d(x,p) < b\}$ es abierto;

ii) $\{x \in X \ / \ a \leq d(x,p) \leq b\}$ es cerrado.

Ejercicio 15. Sean (X, d_1) e (Y, d_2) espacios métricos. Se considera el espacio métrico $(X \times Y, d)$, donde d es la métrica definida en el Ejercicio 8. Probar que para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ valen:

i) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$

ii) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

Ejercicio 16. Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, B subconjuntos de X.

i) Probar las siguientes propiedades del *derivado* de un conjunto:

(a) A' es cerrado

(b) $A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad A' \subseteq B'$

(c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

(d) $\overline{A} = A \cup A'$

(e) $(\overline{A})' = A'$

ii) Probar que $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subseteq X$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \longrightarrow x$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es casi constante.

Ejercicio 17. Hallar interior, clausura, conjunto derivado y frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

$$[0,1] \quad ; \quad (0,1) \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{Q} \cap [0,1] \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad [0,1) \cup \{2\}$$

Ejercicio 18. Caracterizar los abiertos y los cerrados de $\mathbb{Z}$ considerado como espacio métrico con la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}$. Generalizar a un subespacio discreto de un espacio métrico X.

Ejercicio 19. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X.

i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, probar que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

ii) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy en X, probar que la sucesión real $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Ejercicio 20. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq X$ no vacío y $x \in X$, se define la *distancia de* x *a* A como $d_A(x) = \inf\{d(x,a) \ / \ a \in A\}$. Probar:

i) $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y)$ para todo par de elementos $x, y \in X$

ii) $x \in A \quad \Longrightarrow \quad d_A(x) = 0$

iii) $d_A(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \overline{A}$

iv) $B_A(r) = \{x \in X \ / \ d_A(x) < r\}$ es abierto para todo $r > 0$

v) $\overline{B}_A(r) = \{x \in X \ / \ d_A(x) \leq r\}$ es cerrado para todo $r > 0$

Ejercicio 21. Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice un G_δ (resp. un F_σ) si es intersección de una sucesión de abiertos (resp. unión de una sucesión de cerrados) de X.

i) Probar que A es un G_δ si y sólo si $X - A$ es un F_σ.

ii) Probar que todo cerrado es un G_δ. Deducir que todo abierto es un F_σ.

iii) (a) Exhibir una sucesión de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $[0, 1)$. Idem con $[0, 1]$.
(b) Exhibir una sucesión de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión sea $[0, 1)$.
¿Qué conclusión saca de estos ejemplos?

Ejercicio 22. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A, B \subseteq X$ no vacíos se define la *distancia entre* A *y* B por $d(A, B) = \inf\{d(a, b) \ / \ a \in A \ , \ b \in B\}$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) $d(A, B) = d(\overline{A}, B)$

ii) $d(A, B) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap B \neq \emptyset$

iii) $d(A, B) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$

iv) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$