

## ALGEBRA LINEAL - Práctica N°7 - Primer Cuatrimestre de 2023

### Subespacios invariantes - Forma de Jordan

#### Ejercicio 1.

- i) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la transformación lineal definida por  $f(x, y) = (x + 2y, 2x - 2y)$ . Hallar todos los subespacios de  $\mathbb{R}^2$  que sean  $f$ -invariantes.
- ii) Sea  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $g_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la transformación  $\mathbb{R}$ -lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|g_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

(ver ejercicio 2 (iii) Práctica 3). Para cada  $\theta$  estudiar si  $g_\theta$  es diagonalizable, y hallar todos los subespacios de  $\mathbb{R}^2$  que sean  $g_\theta$ -invariantes. ¿Qué cambia si  $g_\theta$  se interpreta en  $\mathbb{C}^2$  y  $\mathbb{C}$ -lineal?

**Ejercicio 2.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una transformación lineal nilpotente tal que  $f^n = 0$  y  $f^{n-1} \neq 0$ .

- i) Probar que para cada  $0 \leq i \leq n$  existe un subespacio  $S_i$  de  $\mathbb{R}^n$  de dimensión  $i$  que es  $f$ -invariante.
- ii) Probar que existe un hiperplano de  $\mathbb{R}^n$  que es  $f$ -invariante pero que no admite un complemento  $f$ -invariante.

#### Ejercicio 3.

- i) Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión finita y sea  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal diagonalizable. Si  $S$  es un subespacio de  $V$  que es  $f$ -invariante, probar que  $f : S \rightarrow S$  es diagonalizable.
- ii) Sean  $A, B \in K^{n \times n}$  tales que  $A.B = B.A$  y sea  $E_\lambda(A) = \{x \in K^n / A.x = \lambda.x\}$ . Probar que  $E_\lambda(A)$  es  $B$ -invariante.
- iii) Sean  $A, B \in K^{n \times n}$  dos matrices diagonalizables tales que  $A.B = B.A$ . Probar que existe  $C \in GL(n, K)$  tal que  $C.A.C^{-1}$  y  $C.B.C^{-1}$  son diagonales. (Es decir,  $A$  y  $B$  se pueden diagonalizar simultáneamente.)

**Ejercicio 4.** Sean  $A, A' \in K^{n \times n}$  las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

- i) Probar que ambas son nilpotentes y que  $A$  es semejante a  $A'$ .
- ii) Dar bases  $B$  y  $B'$  de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  tales que la matriz de la derivación en la base  $B$  sea  $A$  y en la base  $B'$  sea  $A'$ .
- iii) Sea  $B$  una base de  $K^n$  y sea  $f : K^n \rightarrow K^n$  tal que  $|f|_B = A$ . Probar que no existen subespacios propios  $f$ -invariantes  $S$  y  $T$  de  $K^n$  tales que  $K^n = S \oplus T$ .

**Definiciones:** Dados  $v \in K^n$  y  $A \in K^{n \times n}$ , escribimos  $\langle v \rangle_A = \langle v, Av, A^2v, \dots \rangle$ . Decimos que  $v$  es un *vector cíclico para A* si  $\langle v \rangle_A = K^n$ . Si  $V$  es un espacio vectorial,  $v \in V$  y  $f : V \rightarrow V$  es una transformación lineal, definimos  $\langle v \rangle_f$  por  $\langle f^i(v) : i \geq 0 \rangle$  y decimos que  $v$  es *f-cíclico* si  $\langle v \rangle_f = V$ .

**Ejercicio 5.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ . ¿Existe  $v \in \mathbb{R}^3$  tal que  $\mathbb{R}^3 = \langle v \rangle_A$ ?

**Ejercicio 6.** Si  $f : K^n \rightarrow K^n$  es una transformación lineal tal que  $f^2$  tiene un vector cíclico (es decir,  $K^n = \langle v \rangle_{f^2}$ ), probar que  $f$  tiene un vector cíclico. ¿Es válida la recíproca?

**Ejercicio 7.** Hallar la forma y una base de Jordan para cada una de las siguientes matrices:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 8.** Sean  $A_i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ) matrices en  $\mathbb{C}^{8 \times 8}$  nilpotentes tales que  $m_{A_i} = X^3$  ( $1 \leq i \leq 6$ ). ¿Es cierto que necesariamente dos de estas matrices son semejantes?

**Ejercicio 9.** Sean  $A, B \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$  nilpotentes tales que  $m_A = m_B$  y  $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ . Probar que  $A$  y  $B$  son semejantes. ¿Es cierto esto en  $\mathbb{C}^{7 \times 7}$ ?

**Ejercicio 10.** Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j, \\ 1 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

**Ejercicio 11.**

- i) Decidir si existe  $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$  nilpotente tal que  $\text{rg}(A) = 6$ ,  $\text{rg}(A^2) = 4$ ,  $\text{rg}(A^3) = 3$ ,  $\text{rg}(A^4) = 1$  y  $\text{rg}(A^5) = 0$  simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.
- ii) Decidir si existe  $A \in \mathbb{C}^{16 \times 16}$  tal que  $m_A(X) = X^5$ ,  $\text{rg}(A) = 9$ ,  $\text{rg}(A^2) = 5$ ,  $\text{rg}(A^3) = 3$ ,  $\text{rg}(A^4) = 1$  y  $\text{rg}(A^5) = 0$  simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

**Ejercicio 12.** Sea  $f : \mathbb{C}^7 \rightarrow \mathbb{C}^7$  una transformación lineal y sea  $B$  una base de  $\mathbb{C}^7$  tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- i) Hallar  $\mathcal{X}_f$  y  $m_f$ .
- ii) Sea  $\lambda$  un autovalor de  $f$  y sea  $m = \text{mult}(\lambda, \mathcal{X}_f)$ . Se definen  $E_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 / f(v) = \lambda \cdot v\}$  y  $V_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 / (\lambda Id - f)^m(v) = 0\} = \text{Nu}((\lambda Id - f)^m)$ .  
¿Para qué autovalores  $\lambda$  de  $f$  se tiene que  $E_\lambda = V_\lambda$ ?
- iii) Para cada autovalor  $\lambda$  de  $f$ , ¿cuál es la menor potencia  $k$  tal que  $V_\lambda = \text{Nu}((\lambda Id - f)^k)$ ?
- iv) Si  $\lambda$  es un autovalor de  $f$ , sea  $f_\lambda$  la restricción de  $\lambda Id - f$  a  $V_\lambda$ . Calcular  $\dim(\text{Im}(f_\lambda))$  y  $\dim(\text{Im}(f_\lambda^2))$  para cada  $\lambda$ .

**Ejercicio 13.** Hallar la forma y una base de Jordan de cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 14.** Sea  $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$  el subespacio  $V = \langle e^x, x e^x, x^2 e^x, e^{2x} \rangle$ . Sea  $\delta : V \rightarrow V$  la transformación lineal definida por  $\delta(f) = f'$ . Hallar la forma y una base de Jordan para  $\delta$ .

**Ejercicio 15.** Sean  $A, B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Decidir si  $A$  y  $B$  son semejantes.

**Ejercicio 16.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Probar que  $A$  y  $A^t$  son semejantes.

**Ejercicio 17.** Sean  $A, B \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$  tales que  $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B = (X - 1)^3(X - 3)^2$  y  $m_A = m_B$ . Decidir si, necesariamente,  $A$  es semejante a  $B$ .

**Ejercicio 18.** Encontrar todas las formas de Jordan posibles de la matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  en cada uno de los siguientes casos:

- i)  $\mathcal{X}_A(X) = (X - 2)^4(X - 3)^2$ ;  $m_A(X) = (X - 2)^2(X - 3)^2$
- ii)  $\mathcal{X}_A(X) = (X - 7)^5$ ;  $m_A(X) = (X - 7)^2$
- iii)  $\mathcal{X}_A(X) = (X - 2)^7$ ;  $m_A(X) = (X - 2)^3$
- iv)  $\mathcal{X}_A(X) = (X - 3)^4(X - 5)^4$ ;  $m_A(X) = (X - 3)^2(X - 5)^2$

**Ejercicio 19.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$  una matriz con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$  y que cumple, simultáneamente:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^2 &= 11, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^3 &= 10, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^4 &= 10, \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^2 &= 11, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^3 &= 10, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^4 &= 9, \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I)^2 &= 12, & \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I)^3 &= 11. \end{aligned}$$

Hallar su forma de Jordan.

**Ejercicio 20.** Dar la forma de Jordan de una matriz  $A \in \mathbb{C}^{14 \times 14}$  que verifica, simultáneamente:

$$\begin{aligned} m_A &= (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)^2(X - \lambda_4)^3 \quad (\text{con } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j), \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I) &= 11, \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^2 = 10, \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I) = 12, \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I)^2 = 10 \text{ y} \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_4 I) &= 13. \end{aligned}$$

**Ejercicio 21.** Calcular las posibles formas de Jordan de una matriz  $A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$  sabiendo que cumple simultáneamente:

- $X^2 - 6X + 9 \mid m_A(X)$ ,
- $\operatorname{rg}(A + I) = 3$  y
- $(A - 3I)^3(A + I)^3(A - I) = 0$ .

**Ejercicio 22.** Sean  $x, y \in \mathbb{C}^n$  y  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $A = (a_{ij})$  con  $a_{ij} = x_i \cdot y_j$ .

- i) Calcular todos los autovalores y autovectores de  $A$ .
- ii) Calcular las posibles formas de Jordan de  $A$ .

**Ejercicio 23.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$  una matriz tal que  $m_A = X^6$  y sea  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  una base de Jordan para  $A$ . Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices  $A^2, A^3, A^4$  y  $A^5$ .

**Ejercicio 24.** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , encontrar  $B \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$  tal que  $B^2 = A$ .

**Ejercicio 25.** Para cada una de las siguientes matrices  $A$ , calcular  $A^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 26.** Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Se define la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha, & a_1 = \beta \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n & \forall n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término  $a_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_0$ .

**Ejercicio 27.** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 3x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ x_3'(t) &= -x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 2$ ,  $x_3(0) = 1$ .