ÁLGEBRA LINEAL - Práctica N°2 - Primer Cuatrimestre de 2023

Espacios Vectoriales

Ejercicio 1. Probar en cada caso que el conjunto V con la suma y el producto por escalares definidos es un espacio vectorial sobre K.

i) $V = K^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)/a_i \in K \; \forall\, i \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de K (donde K es un cuerpo cualquiera).

$+$: $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}$
$\cdot$: $k \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (ka_i)_{i\in\mathbb{N}}$

ii) X es un conjunto, $V = \mathcal{P}(X)$, $K = \mathbb{Z}_2$.

$+$: $B + C = B \triangle C$
$\cdot$: $0.B = \emptyset, \quad 1.B = B$

iii) $V = \mathbb{R}_{>0}$, $K = \mathbb{Q}$.

$\oplus : a \oplus b = ab$
$\otimes : \frac{m}{n} \otimes a = \sqrt[n]{a^m}$

Ejercicio 2. Sea V un espacio vectorial sobre K, $k \in K$, $v \in V$. Probar las siguientes afirmaciones:

i) $0v = \vec{0}$

ii) $-(-v) = v$

iii) $kv = \vec{0} \Rightarrow k = 0$ ó $v = \vec{0}$

iv) $-\vec{0} = \vec{0}$

Ejercicio 3.

i) Sea $v \in \mathbb{R}^2$ un vector fijo. Se define la función $f_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la siguiente forma:

$$f_v(x, y) = (x, y) + v$$

Interpretar geométricamente el efecto de f_v sobre el plano (f_v se llama la *traslación en* v).

ii) Probar que $\mathbb{R}^2$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma $+_{(2,1)}$ y el producto por escalares $\cdot_{(2,1)}$ definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (x, y) +_{(2,1)} (x', y') &= (x + x' - 2, y + y' - 1) \\ r \cdot_{(2,1)} (x, y) &= r(x - 2, y - 1) + (2, 1) \end{aligned}$$

(Este espacio se notará $\mathbb{R}^2_{(2,1)}$ para distinguirlo de $\mathbb{R}^2$ con la suma y el producto usual. La notación se basa en que el $(2, 1)$ resulta el neutro de la suma $+_{(2,1)}$).

iii) Interpretar geométricamente $+_{(2,1)}$ y $\cdot_{(2,1)}$, teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} (x, y) +_{(2,1)} (x', y') &= f_{(2,1)}\big(f_{(-2,-1)}(x, y) + f_{(-2,-1)}(x', y')\big) \\ r \cdot_{(2,1)} (x, y) &= f_{(2,1)}\big(r \cdot f_{(-2,-1)}(x, y)\big) \end{aligned}$$

Ejercicio 4.

i) Encontrar un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ que sea cerrado para la suma y para la resta pero no para la multiplicación por escalares.

ii) Encontrar un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ que sea cerrado para la multiplicación por escalares pero no para la suma.

Ejercicio 5. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de V como K-espacio vectorial:

i) $S_1 = \{ai \,:\, a \in \mathbb{R}\}\,,\, V = \mathbb{C}\,,\, K = \mathbb{R}$ ó $K = \mathbb{C}$.

ii) $S_2 = \{f \in K[X] \,:\, f'(1) = 0\} \quad V = K[X]$.

iii) $S_3 = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,:\, \int_0^1 f(x)dx = 0\}\,,\, V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\,,\, K = \mathbb{R}$.

iv) $S_4 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \,:\, f'' + 3f' = 0\}\,,\, V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\,,\, K = \mathbb{R}$.

v) $S_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_{(2,1)} \,:\, x + y = 3\}\,,\, V = \mathbb{R}^2_{(2,1)}\,,\, K = \mathbb{R}$.

vi) $S_6 = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \,:\, \exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $a_r = 0\ \forall\, r \geq k\}\,,\, V = K^{\mathbb{N}}$.

vii) $S_7 = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \,:\, a_1.a_2 = 0\}\,,\, V = K^{\mathbb{N}}$.

Ejercicio 6. Sean S y T subespacios de un K-espacio vectorial V. Probar que $S \cup T$ es un subespacio de V $\iff S \subseteq T$ ó $T \subseteq S$.

Ejercicio 7. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes K-espacios vectoriales:

i) $K_n[\mathrm{X}] = \{f \in K[X] \,:\, f = 0$ ó $\mathrm{gr}(f) \leq n\}$.

ii) $\mathbb{C}^n\ ,\ K = \mathbb{R}$.

iii) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y - z = 0\ ;\ x - y = 0\}\,, K = \mathbb{R}$.

iv) $S_2 = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_7)^3 \,:\, x + 2y + z = 0\}$, $K = \mathbb{Z}_7$.

v) $S_3 = \{A \in \mathbb{Q}^{3\times3} \,:\, A = -A^t\}\,,\, K = \mathbb{Q}$.

vi) $S_4 = \{f \in \mathbb{R}_4[\mathrm{X}] \,:\, f(1) = 0$ y $f(2) = f(3)\}\,,\, K = \mathbb{R}$.

vii) $S_5 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,:\, a_i = 0\, \forall i \geq 5\,,\, a_1 + 2a_2 - a_3 = 0,\ a_2 + a_4 = 0\}\,,\, K = \mathbb{R}$.

viii) $S_6 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \,:\, f''' = 0\}\,, K = \mathbb{R}$.

Ejercicio 8. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas:

i) Sea V un K-espacio vectorial y sean $v\,,\, w \in V\,,\, k \in K$. Entonces $\langle v\,,\, w\rangle = \langle v\,,\, w + kv\rangle$.

ii) Sean $v_1\,,\, v_2\,,\, v_3\,,\, v_4\,,\, w \ \in \mathbb{R}^7$ tales que $\langle v_1\,,\, v_2\,,\, w\rangle = \langle v_3\,,\, v_4\,,\, w\rangle$.
Entonces $\langle v_1\,,\, v_2\rangle = \langle v_3\,,\, v_4\rangle$.

Ejercicio 9. Sea $S = \langle(1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1)\rangle \ \subseteq \mathbb{R}^4$.

i) Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$.

ii) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

iii) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

Ejercicio 10. Hallar un sistema de generadores para $S \cap T$ como subespacio de V en cada uno de los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^3\,, \quad S = \langle (1,1,3), (1,3,5), (6,12,24) \rangle\,, \quad T = \langle (1,1,0), (3,2,1) \rangle$.

ii) $V = \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad S = \{(x_{ij}) \,/\, x_{ij} = x_{ji} \,\forall\, i,j\}\,, \quad T = \{(x_{ij}) \,/\, x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$.

iii) $V = \mathbb{R}[X], \quad S = \{f \in \mathbb{R}[X] \,/\, f(1) = 0\}\,, \quad T = \langle 1, X, X^2, X^3 + 2X^2 - X, X^5 \rangle$.

Ejercicio 11. Decidir si los siguientes vectores son linealmente independientes sobre K:

i) $(1-X)^3\,,\ (1-X)^2\,,\ 1-X\,,\ 1$ en $K[X]$.

ii) $(1,4,-1,3), (2,1,-3,-1), (0,2,1,-5)$ en $\mathbb{Q}^4$.

iii) $(1-i, i)\,,\ (2, -1+i)$ en $\mathbb{C}^2$ para $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.

iv) $f(x) = e^x\,,\ g(x) = x$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

v) $f(x) = \operatorname{sen}(x)\,,\ g(x) = \cos(x)$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

vi) $\{I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2-1}\}$, con $A \in K^{n\times n}$, $n \geq 2$, K un cuerpo cualquiera.

Ejercicio 12. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\{v_1\,,\ v_2\,,\ v_3\} \subset V$ es un conjunto linealmente independiente en los siguientes casos:

i) $\{(k,1,0)\,,\ (3,-1,2)\,,\ (k,2,-2)\}$.

ii) $\{kX^2 + X\,,\ X^2 - k\,,\ k^2X\} \subset \mathbb{R}[X]$.

iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Ejercicio 13.

i) Sean $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R} \iff \{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$.

ii) Probar que $\{e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. ¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial?

Ejercicio 14. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del K-espacio vectorial V indicado:

i) $\{(1,1,1,1)\,,\ (0,2,1,1)\}, V = \mathbb{R}^4, K = \mathbb{R}$

ii) $\{X^3 - 2X + 1\,,\ X^3 + 3X\}, V = \mathbb{R}_3[X], K = \mathbb{R}$.

iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{C}^{2\times 2}, K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.

Ejercicio 15. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores:

i) $S = \langle (1,1,2)\,,\,(1,3,5)\,,\,(1,1,4)\,,\,(5,1,1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$.

ii) $S = \langle X^2+2X+1\,,\,X^2+3X+1\,,\,X+2\rangle \subseteq \mathbb{R}[X], K = \mathbb{R}$.

iii) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}, K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.

Ejercicio 16. Hallar una base y la dimensión de los siguientes K-espacios vectoriales:

i) $\{f \in \mathbb{R}[X] \,:\, f = 0$ ó $gr(f) \leq 3$ y $f(2) = f(-1)\}, K = \mathbb{R}$.

ii) $\{f \in \mathbb{R}[X] \,:\, f = 0$ ó $gr(f) \leq 3$ y f es un múltiplo de $(x^2-2)\}, K = \mathbb{R}$.

iii) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{K}^{\mathbb{N}} \,:\, a_i = a_j \ \forall\, i,j\,\}$.

Ejercicio 17. Hallar la dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial S para cada $k \in \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

i) $S = \langle (1,k,1)\,,\,(-1,k,1)\,,\,(0,1,k)\rangle \subset \mathbb{R}^3$.

ii) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, Ax = 0\}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Ejercicio 18. Sean S y T los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \langle (1,2,1,0),(2,1,0,1)\rangle, \quad T = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

Hallar un subespacio $U \in \mathbb{R}^4$ tal que $\dim U = 2$ y $S \cap T \subset U \subset T$.

Ejercicio 19. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales:

i) $\langle (-2,1,6),(3,0,-8)\rangle = \langle (1,k,2k),(-1,-1,k^2-2),(1,1,k)\rangle$.

ii) $S \cap T = \langle (0,1,1)\rangle$, siendo $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle (1,k,2),(-1,2,k)\rangle$.

Ejercicio 20. En cada uno de los siguientes casos caracterizar $S + T \subseteq V$ y determinar si la suma es directa:

i) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1,1,1)\rangle$, $T = \langle (2,-1,1),(3,0,2)\rangle$.

ii) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] \,:\, f = 0$ ó $gr(f) \leq 3\}$, $T = \{f \in \mathbb{R}[X] \,:\, \mathrm{mult}(4,f) \geq 4\}$.

iii) $V = \mathbb{R}^{2\times 3}$, $S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 3} \,:\, A_{11} + A_{21} = 0,\ 3A_{22} - 2A_{11} = A_{13} + A_{23}\}$,
$T = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Ejercicio 21.

i) Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $K^{n\times n}$ y calcular su dimensión.

(a) $S_1 = \{A \in K^{n\times n} \,:\, A = A^t\}$ (matrices simétricas)
(b) $S_2 = \{A \in K^{n\times n} \,:\, A = -A^t\}$ (matrices antisimétricas)
(c) $S_3 = \{A \in K^{n\times n} \,:\, A_{ij} = 0$ si $i \neq j\}$ (matrices diagonales)

(d) $S_4 = \{A \in K^{n\times n} \,:\, A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } A_{11} = A_{22} = \cdots = A_{nn}\}$ (matrices escalares)

(e) $S_5 = \{A \in K^{n\times n} \,:\, tr(A) = 0\}$

ii) Probar que:

(a) $S_1 \oplus S_2 = K^{n\times n}$ si $2 \neq 0$ en K.

(b) $S_4 \oplus S_5 = K^{n\times n}$ si $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Ejercicio 22. Para cada S dado hallar $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$ (en este caso, T se dice un *suplemento* de S con respecto a V):

i) $S = \langle (1,2,-1,3)\,,\,(2,3,-2,1)\,,\,(0,1,0,7)\rangle$, $V = \mathbb{R}^4$.

ii) $S =< 3, 1 + X^2 >$, $V = \mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$.

iii) $S = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, tr(A) = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{n\times n}$.

Ejercicio 23. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar:

i) Si S, T son subespacios de $\mathbb{R}^3$ con $\dim S = \dim T = 2 \Rightarrow \exists\, v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$.

ii) Si S, T, W son subespacios de $\mathbb{R}^{11}$ con $\dim S = \dim T = \dim W = 4 \Rightarrow \dim(S \cap T \cap W) \geq 1$.

Ejercicio 24. Sean S, T y U subespacios de un K-espacio vectorial V tales que

$$S \cap T = S \cap U, \qquad S + T = S + U \qquad \text{y} \qquad T \subseteq U.$$

Probar que $T = U$.

Ejercicio 25. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (es decir, un subespacio de dimensión $n-1$):

i) Probar que $\forall\, v \notin T$, $T \oplus < v >= V$.

ii) Si S es un subespacio de V tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$. Calcular dim (S ∩ T).

iii) Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir $\dim(S \cap T)$.

Ejercicio 26. Sea $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

i) Sean $S = \{f \in V \,/\, f(-x) = f(x) \,\forall\, x \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{f \in V \,/\, f(-x) = -f(x) \,\forall\, x \in \mathbb{R}\}$ (S es el conjunto de las funciones pares y T es el conjunto de las funciones impares). Probar que S y T son subespacios de V y que $S \oplus T = V$.

ii) Sean $U = \{f \in V \,/\, f(0) = 0\}$ y $W = \{f \in V \,/\, f \text{ es constante}\}$. Probar que U y V son subespacios de V y que $U \oplus W = V$.

Coordenadas

Ejercicio 27. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B en los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (1,2,-1)$ y $B = \{(1,2,-1), (0,1,1), (0,0,2)\}$.

ii) $V = \mathbb{R}_3[X]$; $v = 2X^2 - X^3$ y $B = \{3\,,\, 1+X\,,\, X^2+5\,,\, X^3+X^2\}$.

iii) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$; $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$.

Ejercicio 28. Calcular $C(B, B')$ en los siguientes casos:

i) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$, $B' = \{(-1,1,1),(2,0,1),(1,-1,3)\}$.

ii) $\mathrm{V} = \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{3\,,\, 1+X\,,\, X^2\}$, $B' = \{1\,,\, X+3\,,\, X^2+X\}$.

iii) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^4$, $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $B' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$.

Ejercicio 29. Dado $v \in \mathrm{V}$ y las bases B y B', hallar las coordenadas de v respecto de B y utilizando la matriz de cambio de base, las coordenadas de v respecto de B':

i) $v = (-1, 5, 6)$ y B, B' como en el Ejercicio 28. i).

ii) $v = X$ y B, B' como en el Ejercicio 28. ii).

iii) $v = 2v_1 + 3v_2 - 5v_3 + 7v_4$ y B, B' como en el Ejercicio 28. iii).

Ejercicio 30. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sean B , B' y B'' bases de V. Probar que $C(B, B'') = C(B', B'')C(B, B')$. Deducir que $C(B, B')$ es una matriz inversible con $C(B, B')^{-1} = C(B', B)$.

Ejercicio 31. Dadas la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de K^3, hallar:

i) una base B_1 de K^3 tal que $M = C_{B_1 B}$.

ii) una base B_2 de K^3 tal que $M = C_{B B_2}$.