ÁLGEBRA LINEAL - Práctica N°1 - Primer Cuatrimestre de 2023

Nota: La letra K denota un cuerpo arbitrario. De ser necesario aparecerá especificado el cuerpo al que nos estamos refiriendo.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados sobre $K = \mathbb{R}$. ¿Cambia algo si $K = \mathbb{Q}$? ¿Y si $K = \mathbb{C}$?

i) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \end{cases}$$

ii) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 &= 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2. Determinar los $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ para los cuales el siguiente sistema admite solución.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 &= \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 &= \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= \alpha_3 \end{cases}$$

Ejercicio 3.

i) Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para que cada uno de los siguientes sistemas tenga alguna solución no trivial y, para esos k, resolverlos.

(a) $$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 &= 0 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 &= 0 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} kx_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + kx_2 &= 0 \\ k^3x_1 + x_2 + k^3x_3 + kx_4 &= 0 \\ x_1 + k^2x_2 + kx_3 + kx_4 &= 0 \end{cases}$$

ii) Determinar para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 &= -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 &= 2 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ el siguiente sistema tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 &= 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 &= 2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 &= b \end{cases}$$

Ejercicio 5. Resolver el siguiente sistema en $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} i\,x_1 - (1+i)x_2 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2i\,x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$$

Ejercicio 6. Resolver el siguiente sistema en $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 4 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 & = & 2 \\ 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 1 \end{cases}$$

Ejercicio 7. Encontrar un sistema de ecuaciones lineales a coeficientes reales cuya solución general sea $(1,1,0) + \lambda(1,2,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Matrices

Ejercicio 8. Sean m, n, $r \in \mathbb{N}$. Probar que:

i) Si $A \in K^{m\times n}$ satisface que $Ax = 0 \;\forall\, x \in K^n$, entonces $A = 0$. Deducir que si A, $B \in K^{m\times n}$ satisfacen que $Ax = Bx \;\forall\, x \in K^n$, entonces $A = B$.

ii) Si $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times r}$ con $B = (b_{ij})$ y, para $1 \le j \le r$, $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ (la columna j-ésima de B), entonces $A \cdot B = (A \cdot B_1 \mid \dots \mid A \cdot B_r)$ (es decir, $A \cdot B_j$ es la columna j-ésima de $A \cdot B$).

Ejercicio 9.

i) Sean $A, B, C \in K^{n\times n}$ $(n \ge 2)$. Mostrar con un contraejemplo que las siguientes afirmaciones son falsas.

(a) $A \cdot B = 0 \Rightarrow\; A = 0$ ó $B = 0$.
(b) $A \cdot B = A \cdot C$ y $A \neq 0 \;\Rightarrow\; B = C$.
(c) $A \cdot B = 0 \;\Rightarrow\; B \cdot A = 0$.
(d) $A^j = 0 \Rightarrow\; A = 0$.
(e) $A^2 = A \;\Rightarrow\; A = 0$ ó $A = I_n$.

ii) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in K^{n\times n}$ para que

(a) $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
(b) $A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$.

iii) Probar que si A y $B \in K^{n\times n}$, no necesariamente vale $A^2 \cdot B^2 = (A \cdot B)^2$.

Ejercicio 10.

i) Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$, el producto de matrices en $K^{n\times n}$ no es conmutativo.

ii) Caracterizar el conjunto $\{A \in K^{n\times n} / \, A \cdot B = B \cdot A \;\; \forall\, B \in K^{n\times n}\}$.

Ejercicio 11. Sean $A, A' \in K^{n\times n}$, $B, B' \in K^{n\times m}$, $C, C' \in K^{m\times n}$ y $D, D' \in K^{m\times m}$. Sean M, $M' \in K^{(n+m)\times(n+m)}$ definidas por $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$.
Entonces $M \cdot M' = \begin{pmatrix} A \cdot A' + B \cdot C' & A \cdot B' + B \cdot D' \\ C \cdot A' + D \cdot C' & C \cdot B' + D \cdot D' \end{pmatrix}$.

Ejercicio 12. Sean $A, A' \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times r}$, $D, D' \in K^{n\times n}$ y $\alpha \in K$. Probar que:

i) $(A + A')^t = A^t + (A')^t$

ii) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

iii) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

iv) $\mathtt{tr}(D + D') = \mathtt{tr}(D) + \mathtt{tr}(D')$

v) $\mathtt{tr}(\alpha D) = \alpha \mathtt{tr}(D)$

vi) $\mathtt{tr}(D \cdot D') = \mathtt{tr}(D' \cdot D)$

Ejercicio 13. Sean A y $B \in K^{n\times n}$.

i) Probar que si A y B son triangulares superiores, $A \cdot B$ es triangular superior.

ii) Probar que si A y B son diagonales, $A \cdot B$ es diagonal.

iii) Probar que si A es estrictamente triangular superior (es decir, $A_{ij} = 0$ si $i \geq j$), $A^n = 0$.

Ejercicio 14. Sea $A \in K^{n\times n}$.

i) Probar que $A \cdot A^t$ y $A^t \cdot A$ son simétricas. Encontrar un ejemplo donde $A \cdot A^t \neq A^t \cdot A$.

ii) El producto de dos matrices simétricas, ¿es una matriz simétrica?

iii) Si $K = \mathbb{R}$, probar que $A = 0 \iff A \cdot A^t = 0 \iff tr(A \cdot A^t) = 0$.

Ejercicio 15. Sean A , $B \in K^{n\times n}$. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

i) Si A y B son inversibles $\Rightarrow A + B$ es inversible.

ii) A es inversible $\iff$ A^t es inversible.

iii) Si $\mathtt{tr}(A) = 0 \Rightarrow A$ no es inversible.

iv) Si A es nilpotente (es decir, $\exists\, j \in \mathbb{N} \,/\, A^j = 0$) $\Rightarrow A$ no es inversible.

Ejercicio 16. Sea $A \in K^{m\times n}$ y sea $b \in K^m$. Sea $H = \{x \in K^n \,/\, A \cdot x = b\}$. Probar:

i) Si $C \in K^{m\times m}$ es inversible, entonces $H = \{x \in K^n \,/\, (C \cdot A) \cdot x = C \cdot b\}$.

ii) Si $m = n$ y $A \in K^{n\times n}$ es inversible, entonces H tiene un solo elemento. ¿Cuál es? (Notar que esto significa que si A es inversible, cualquier sistema lineal cuya matriz asociada sea A tiene solución única).

Matrices Elementales

Ejercicio 17.

i) Para cada i, j $(1 \leq i, j \leq n)$, sea $E^{ij} \in K^{n\times n}$ la matriz:

$$(E^{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ y } j = l \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Las matrices E^{ij} se llaman *matrices canónicas* de $K^{n\times n}$.

a) Si $a \in K \setminus \{0\}$ y $1 \leq i \leq n$, se define $M_i(a) \in K^{n\times n}$ como

$$M_i(a) = E^{11} + E^{22} + ... + aE^{ii} + E^{(i+1)(i+1)} + ... + E^{nn} = I_n + (a-1)E^{ii}.$$

Escribir todas las posibles $M_i(a)$ para $n = 2, 3, 4$ ($a \in K$).

b) Sean $1 \leq i, j \leq n$, con $i \neq j$. Se define la matriz $P^{ij} \in K^{n\times n}$ como la matriz que se obtiene permutando la fila i con la fila j de la matriz identidad. Comprobar que

$$P^{ij} = I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji}.$$

Escribir todas las posibles P^{ij} para $n = 2, 3, 4$.

c) Sean $1 \leq i, j \leq n$, con $i \neq j$ y $a \in K$. Se define la matriz $T^{ij}(a) \in K^{n\times n}$ como

$$T^{ij}(a) = I_n + aE^{ij}.$$

Escribir todas las posibles $T^{ij}(a)$ para $n = 2, 3, 4$ ($a \in K$).

Las matrices $M_i(a)$, P^{ij} y $T^{ij}(a)$ se llaman *matrices elementales* de $K^{n\times n}$.

ii) Probar que:

a) $M_i(a) \in GL(n, K)$ con $(M_i(a))^{-1} = M_i(a^{-1})$
b) $P^{ij} \in GL(n, K)$ con $(P^{ij})^{-1} = P^{ij}$
c) $T^{ij} \in GL(n, K)$ con $(T^{ij}(a))^{-1} = T^{ij}(-a)$

iii) Sea $A \in K^{n\times m}$, $A = (a_{ij})_{i,j}$, y sea F_i ($1 \leq i \leq n$) la i-ésima fila de A, es decir, $F_i = (a_{i1}, \ldots, a_{im})$ y $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$. Probar que:

a) $E^{ij} \cdot A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = (0, \ldots, 0)$ si $k \neq i$ y $F'_i = F_j$.

b) $M_i(a) \cdot A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i$ y $F'_i = aF_i$.

c) $P^{ij} \cdot A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i\,,\, j$; $F'_i = F_j$ y $F'_j = F_i$.

d) $T^{ij}(a) \cdot A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i$ y $F'_i = F_i + aF_j$.

Notar, como conclusión, que triangular por filas una matriz es multiplicar a izquierda por varias matrices elementales.

¿Cómo se pueden obtener las matrices elementales a partir de la matriz identidad?

Ejercicio 18.

i) Sea $A = T^{12}(1) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Calcular A^{20} y $20A$.

ii) Calcular $(P^{ij})^{15}$ y $(P^{ij})^{16}$.

iii) Sea $B = M_3(2) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Calcular B^{20} y $20B$.

Ejercicio 19. Determinar si las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo exhibir sus inversas. Escribir las que sean inversibles como producto de matrices elementales.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

iv) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ v) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Ejercicio 20. Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $b \in K^n$.

i) Probar que: el sistema $A \cdot x = b$ tiene solución única $\iff$ A es inversible.

ii) Probar que: A es inversible $\iff$ las filas de A son linealmente independientes $\iff$ las columnas de A son linealmente independientes.

Ejercicio 21. Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que $\exists\, B \in K^{n\times n}$ / $B \cdot A = I_n$ $\iff$ A es inversible. Deducir que $\exists\, B \in K^{n\times n} / \, A \cdot B = I_n$ $\iff$ A es inversible.
