

# ÁLGEBRA LINEAL COMPUTACIONAL

Primer Cuatrimestre 2022

## Práctica N° 6: Valores singulares.

**Ejercicio 1.** Considerar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcular una descomposición en valores singulares de  $\mathbf{A}$ .
- (b) Dibujar el círculo unitario en  $\mathbb{R}^2$  y la elipse  $\{\mathbf{Ax} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}$ , señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.
- (c) Calcular  $\|\mathbf{A}\|_2$  y  $\text{cond}_2(\mathbf{A})$ .
- (d) Calcular  $\mathbf{A}^{-1}$  usando la descomposición hallada.

**Ejercicio 2.** Determinar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 3.** Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$$

Probar que para todo  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  se tiene  $\|\mathbf{Av}\|_2 \geq 15\|\mathbf{v}\|_2$ .

**Ejercicio 4.** Mostrar que  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tiene un valor singular nulo si y sólo si tiene un autovalor nulo.

**Ejercicio 5.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , probar que los valores singulares de  $A^t$ ,  $\bar{A}$  y  $A^*$  son iguales a los de  $\mathbf{A}$ .

**Ejercicio 6.** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , de rango  $r$ , con valores singulares no nulos:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$

- (a) Probar que  $\mathbf{A}$  puede escribirse como una suma de  $r$  matrices de rango 1.
- (b) Probar que dado  $s < r$  se pueden sumar  $s$  matrices de rango 1 adecuadamente elegidas de manera de obtener una matriz  $\mathbf{A}_s$  que satisface:

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_s\|_2 = \sigma_{s+1}$$

*Nota:*  $\mathbf{A}_s$  resulta ser la mejor aproximación a  $\mathbf{A}$  (en norma 2), entre todas las matrices de rango  $s$ .

**Ejercicio 7.** Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Hallar la matriz de rango 2 que mejor aproxima a  $\mathbf{A}$  en norma 2.
- (b) Hallar la matriz de rango 1 que mejor aproxima a  $\mathbf{A}$  en norma 2.

**Ejercicio 8.** Dada una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$ , cuya descomposición en valores singulares reducida es  $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{\Sigma}}\hat{\mathbf{V}}^t$ . Se define la pseudo-inversa de  $\mathbf{A}$  como  $\mathbf{A}^\dagger = \hat{\mathbf{V}}\hat{\mathbf{\Sigma}}^\dagger\hat{\mathbf{U}}^t$ , donde  $\hat{\mathbf{\Sigma}}^\dagger$  es la matriz  $\hat{\mathbf{\Sigma}}$  con los valores singulares no nulos invertidos.

- (a) Verificar que  $\mathbf{A}^\dagger$  satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{A} & \text{iii. } (\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger)^t = \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger \\ \text{ii. } \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger & \text{iv. } (\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A})^t = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} \end{array}$$

- (b) Probar que si dos matrices  $\mathbf{B}_1$  y  $\mathbf{B}_2$  satisfacen las 4 propiedades del ítem anterior, entonces verifican  $\mathbf{A}\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}\mathbf{B}_2$  y  $\mathbf{B}_1\mathbf{A} = \mathbf{B}_2\mathbf{A}$ .
- (c) Probar que la pseudo inversa de  $A$  es única.

**Ejercicio 9.** Caracterizar geoméricamente y graficar la imagen de la esfera unitaria

$$S_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

por la transformación  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 2 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 10.** Hallar, si existe, una matriz  $A$  con coeficientes reales y del tamaño adecuado para que los valores singulares no nulos de  $\mathbf{A}$  sean  $\{\frac{3}{2}, 3\}$ ,

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad (2 \ 2 \ 1)\mathbf{A} = (0 \ 0 \ 0).$$

### Compresión de Imágenes

El resultado del ejercicio 6 se puede aprovechar para comprimir imágenes. La idea es la siguiente: dada una imagen (en principio, en blanco y negro), se puede representar a través de una matriz en la que cada elemento indica la intensidad de color del pixel. El objetivo de los siguientes ejercicios es estudiar esta aplicación.

**Ejercicio 11.** Descargar la imagen `quijote.jpg` y utilizar el comando `imread` de la librería `matplotlib.pyplot` para cargarla. Imprimir el resultado. Mostrar la imagen utilizando el comando `imshow`. Probablemente, la gama de colores por defecto no sea en blanco y negro. Ejecutar el comando: `from matplotlib import cm` y volver a correr `imshow`, esta vez con la opción `cm="gray"`. (Buscando `matplotlib colormap` se encuentran fácilmente distintos mapas de colores para graficar).



**Ejercicio 12.** Escribir un programa que reciba como input una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y un entero positivo  $r$  y:

- Calcule la descomposición en valores singulares  $\mathbf{A}$ , utilizando el comando `np.linalg.svd` o el comando `scipy.linalg.svd`. Ambos comandos devuelven  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{\min\{n,m\}}$ , de manera tal que  $\mathbf{A} = \mathbf{U} \text{diag}(\mathbf{s}) \mathbf{V}$ .
- Devuelva: una tupla con la dimensión original de la matriz  $\mathbf{A}$  ( $n, m$ ), las matrices  $\tilde{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^{n \times r}$  y  $\tilde{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{r \times m}$  que surgen de eliminar de  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  los vectores singulares con índice mayor a  $r$  y el vector de valores singulares  $\tilde{\mathbf{s}} \in \mathbb{R}^r$ , también recortado.

**Ejercicio 13.** Escribir un programa que reconstruya la matriz a partir del output del programa anterior. Es decir, que:

- Reciba el tamaño  $(n, m)$ , las matrices  $\tilde{\mathbf{U}}$  y  $\tilde{\mathbf{V}}$  el vector  $\tilde{\mathbf{s}}$ .
- Amplie las matrices con ceros generando  $\mathbf{U}' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{V}' \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ; y ponga  $\tilde{\mathbf{s}}$  en la diagonal de una matriz  $\mathbf{\Sigma}' \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .
- Devuelva la matriz  $\mathbf{B} = \mathbf{U}' \mathbf{\Sigma}' \mathbf{V}'$  (que es la mejor aproximación a  $\mathbf{A}$  entre las matrices de rango  $r$ ).

**Ejercicio 14.** Aplicar los programas anteriores a la imagen del ejemplo (y eventualmente a otras). El output del primer programa correspondería a la imagen comprimida, sólo se almacenan: una tupla con dos números  $((n, m))$ ,  $r$  vectores de longitud  $n$ ,  $r$  vectores de longitud  $m$  y  $r$  valores singulares. El segundo programa *abre* los datos comprimidos y muestra la imagen. Naturalmente, la compresión implica la pérdida de información (y por lo tanto, de calidad en la imagen). Experimentar con distintos valores de  $r$ .

Se puede estudiar la calidad de la aproximación a través del error relativo:

$$\frac{\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_r\|_2}{\|\mathbf{A}\|_2} = \frac{\sigma_{r+1}}{\sigma_1}.$$

Para analizar la proporción de compresión se puede calcular el cociente entre la cantidad de datos almacenados por la matriz original ( $mn$ ) y los datos almacenados por las matrices comprimidas  $((m+n)r+r+2)$ .

Calcular el error relativo de aproximación y la proporción de compresión para distintos valores de  $r$ .

**Ejercicio 15.** La misma idea puede utilizarse con imágenes en color. Al leer una imagen color, `imread` genera un array  $A$  tridimensional, de  $n \times m \times 3$ .  $A[:, :, 0]$ ,  $A[:, :, 1]$  y  $A[:, :, 2]$  son los canales *RGB* (en ese orden) de la imagen. Experimentar con alguna imagen color realizando la compresión en cada una de las componentes (puede ser con parámetros  $r_i$  distintos) y reensamblando el array tridimensional.