Álgebra 1

Práctica 6: Números Complejos

Patricia Jancsa
Viernes 4/6/2021

Ej. 1.

Calcular la suma, el producto y sus partes reales e imaginarias. Calcular también el inverso de z y de w. Verificar la validez de las propiedades para los siguientes casos:

$$z = 1 + i,\ w = \sqrt{3} - 3i$$

$$\textit{SUMA}: z+w = (1+i)+(\sqrt{3}-3i) = 1+\sqrt{3}+(1-3)i = 1+\sqrt{3}-2i$$

$$\Longrightarrow\ Re(z+w) = 1+\sqrt{3},\ Im(z+w) = -2$$

$$\textit{PRODUCTO}: z \cdot w = (1+i)\cdot(\sqrt{3}-3i) = \sqrt{3}+3+(\sqrt{3}-3)i$$

$$\Longrightarrow\ Re(z \cdot w) = \sqrt{3}+3,\ Im(z \cdot w) = \sqrt{3}-3$$

$$\text{INVERSO de } z \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{(1+i)}}{2} = \frac{1-i}{2}$$

pues comprobemos

$$z \cdot z^{-1} = (1+i)\,\frac{1-i}{2} = \frac{(1+i)(1-i)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{INVERSO de } w \Rightarrow w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{\overline{w}}{|w|^2} = \frac{\overline{(\sqrt{3}-3i)}}{12} = \frac{\sqrt{3}+3i}{12}$$

pues comprobemos

$$w \cdot w^{-1} = (\sqrt{3}-3i)\,\frac{\sqrt{3}+3i}{12} = \frac{(\sqrt{3}-3i)(\sqrt{3}+3i)}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

Propiedades :

a) $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{(1+i)}} = \overline{1-i} = 1+i = z$

b) $\overline{z+w} = \overline{(1+i)+(\sqrt{3}-3i)} = \overline{1+\sqrt{3}+(1-3)i}$

$$= \overline{1+\sqrt{3}-2i} = 1+\sqrt{3}+2i$$

Por otra parte, $\overline{z}+\overline{w}$

$$= \overline{(1+i)} + \overline{(\sqrt{3}-3i)} = (1-i)+(\sqrt{3}+3i) = 1+\sqrt{3}+2i$$

c) $\overline{z \cdot w} = \overline{(1+i)\cdot(\sqrt{3}-3i)} = \overline{\sqrt{3}+3+(\sqrt{3}-3)i}$

$$= \sqrt{3}+3-(\sqrt{3}-3)i$$

Por otra parte, $\overline{z}\cdot\overline{w} = \overline{(1+i)}\cdot\overline{(\sqrt{3}-3i)} = (1-i)\cdot(\sqrt{3}+3i) = \overline{z \cdot w}$

d) $|z \cdot w| = |(1+i)\cdot(\sqrt{3}-3i)| = |\sqrt{3}+3+(\sqrt{3}-3)i|$

$$= \sqrt{(\sqrt{3}+3))^2+(\sqrt{3}-3)^2} = \sqrt{12+2\sqrt{3}+12-2\sqrt{3}}$$

$= 2\sqrt{6} = |z| \cdot |w|$

e) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$:

$$Si\ z = 1+i \Longrightarrow \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{(1+i)}}{2} = \frac{1-i}{2} = z^{-1}$$

pues comprobemos

$$z \cdot z^{-1} = (1+i)\left(\frac{1-i}{2}\right) = \frac{(1+i)(1-i)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

f) $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$:

$$z^{-1} = (1+i)^{-1} = \frac{\overline{(1+i)}}{2} = \frac{1-i}{2}$$

Entonces

$$\overline{z^{-1}} = \overline{\left(\frac{1-i}{2}\right)} = \frac{1+i}{2} = (1-i)^{-1} = (\overline{z})^{-1}$$

Módulo y Argumento

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ entonces

$$1) \qquad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

la cual implica la validez de

$$2) \qquad |z^n| = |z|^n$$

$$3) \qquad arg\ (z \cdot w) = arg(z) + arg(w) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$$

la cual implica la validez de

$$4) \qquad arg\ (z^n) = n\ arg\ (z) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$$

Valores de Senos y Cosenos Notables del 1er Cuadrante

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Ej. 2.

Calcular el módulo y el argumento de cada número complejo:

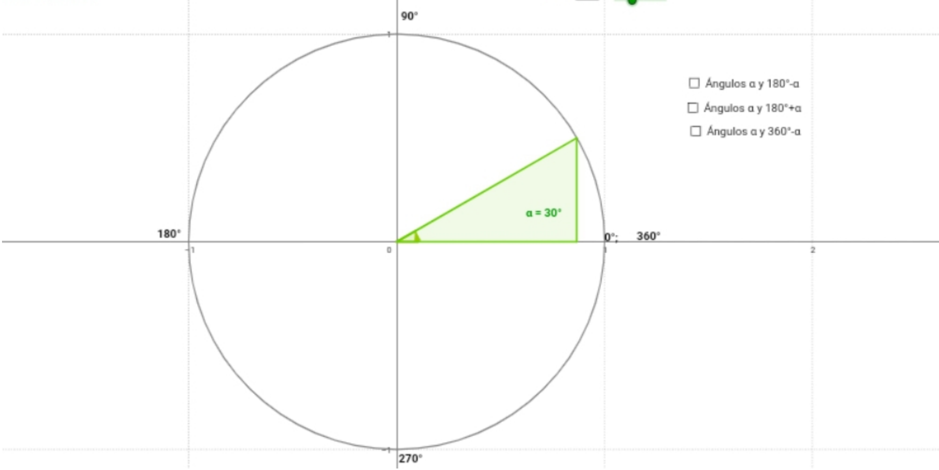
$a)\ z = 3 + \sqrt{3}i$ $\qquad b)\ w = 12 - 4\sqrt{3}i$

$c)\ z = -6 - 2\sqrt{3}i$ $\qquad d)\ \mathcal{T} = -\sqrt{3} + 3i$

Solución: a) $|z| = |3 + \sqrt{3}i| = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$\Longrightarrow z = 2\sqrt{3} \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}i\right)}_{complejo\ \ de\ \ modulo\ \ 1} = 2\sqrt{3} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}_{complejo\ \ de\ \ modulo\ \ 1}$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & = & \cos\theta \\ \\ \dfrac{1}{2} & = & \operatorname{sen}\theta \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \textit{ es el argumento principal de } z$$



$$\boxed{\text{Todos los argumentos son } \arg(z) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}}$$

$\Longrightarrow$ z se representa en el 1er cuadrante del plano $\mathbb{C}$

sobre la semirrecta que empieza en el origen,

a 30° medidos desde el semieje positivo x,

en sentido antihorario, a distancia $2\sqrt{3}$

$$\boxed{\text{Todos los argumentos son } \arg(z) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}}$$

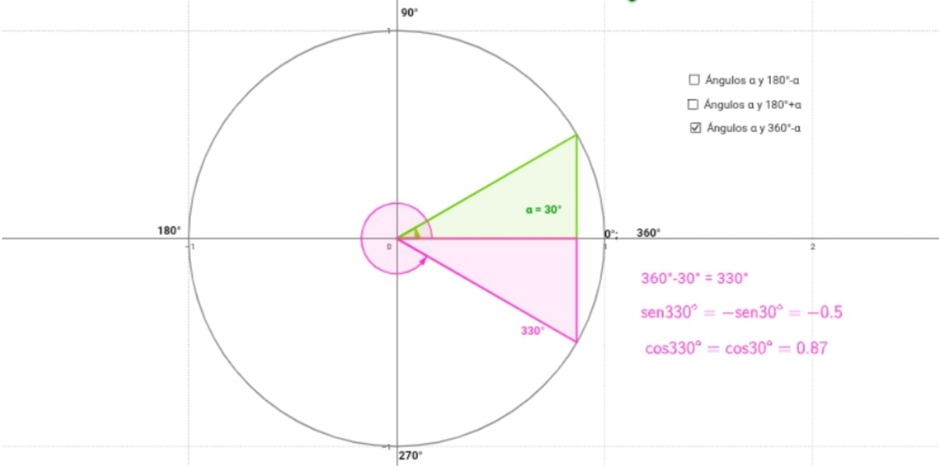
b) $w = 12 - 4\sqrt{3}i.$

$$\Longrightarrow |w| = |12 - 4\sqrt{3}i| = \sqrt{(12)^2 + (-4\sqrt{3})^2} = \sqrt{8^2 \cdot 3} = 8\sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow w = 8\sqrt{3} \cdot \underbrace{\left(\frac{12}{8\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{3}}{8\sqrt{3}}i\right)}_{complejo\ de\ modulo\ 1} = 8\sqrt{3} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}_{complejo\ de\ modulo\ 1}$$

Esto es imprescindible para calcular el argumento θ, porque así:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\sqrt{3}}{2} & = & \cos\theta \\ -\frac{1}{2} & = & \operatorname{sen}\theta \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{11\pi}{6} \textit{ es el argumento principal de } w$$



$$\boxed{\text{Todos los argumentos son } \arg(z) = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}}$$

Es decir que

w se representa en el 4to cuadrante del plano $\mathbb{C}$

sobre la semirrecta que empieza en el origen,

a 30° medidos desde el semieje positivo x,

en sentido negativo = horario

a distancia $8\sqrt{3}$

$$\boxed{\text{Todos los argumentos son } arg(w) = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}}$$

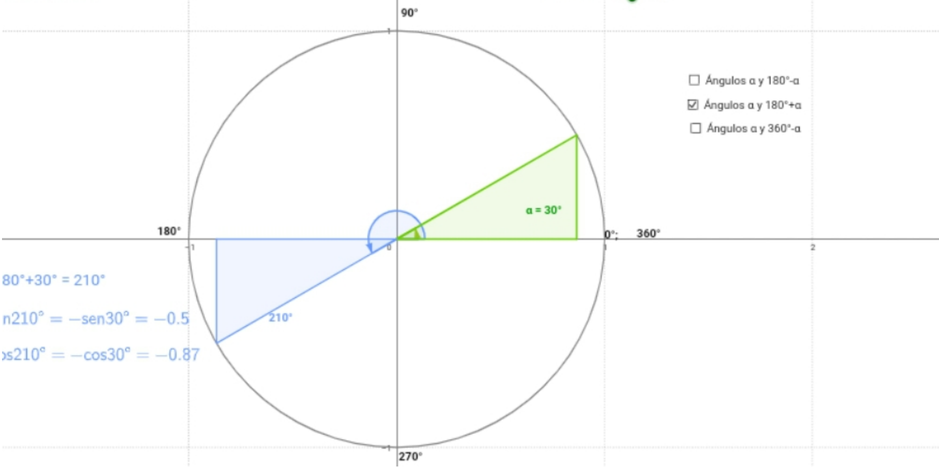
c) $z = -6 - 2\sqrt{3}i$.

$$\Longrightarrow |z| = |-6 - 2\sqrt{3}i| = \sqrt{(-6)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow z = 4\sqrt{3} \cdot \underbrace{\left(-\frac{6}{4\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}i\right)}_{complejo\ \ de\ \ modulo\ \ 1} = 4\sqrt{3} \cdot \underbrace{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}_{complejo\ \ de\ \ modulo\ \ 1}$$

así podemos calcular el argumento θ:

$$\left.\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & = \cos\theta \\ -\dfrac{1}{2} & = \operatorname{sen}\theta \end{cases}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{7}{6}\pi \text{ \emph{es el argumento principal}}$$



$$\boxed{\text{Todos los argumentos son } \arg(z) = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}}$$

$\Longrightarrow$ z se representa en el 3er cuadrante del plano $\mathbb{C}$

sobre la semirrecta que empieza en el origen, a 210°

medidos desde el semieje positivo x,

en sentido positivo = antihorario

a distancia $4\sqrt{3}$ del origen sobre la semirrecta

$$\boxed{\text{Todos los argumentos de } z \text{ son } arg(z) = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}}$$

d) $\mathcal{T} = -\sqrt{3} + 3i$

$$\Longrightarrow |\mathcal{T}| = |-\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{T} = 2\sqrt{3} \cdot \underbrace{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2\sqrt{3}} i \right)}_{\textit{complejo de modulo } 1} = 2\sqrt{3} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)}_{\textit{complejo de modulo } 1}$$

Calculemos su argumento θ:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & = & \cos\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & = & \operatorname{sen}\theta \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \textit{ es el argumento principal de } \mathcal{T}$$

$$\boxed{\text{Todos los argumentos de } \mathcal{T} \text{ son } arg(\mathcal{T}) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}}$$

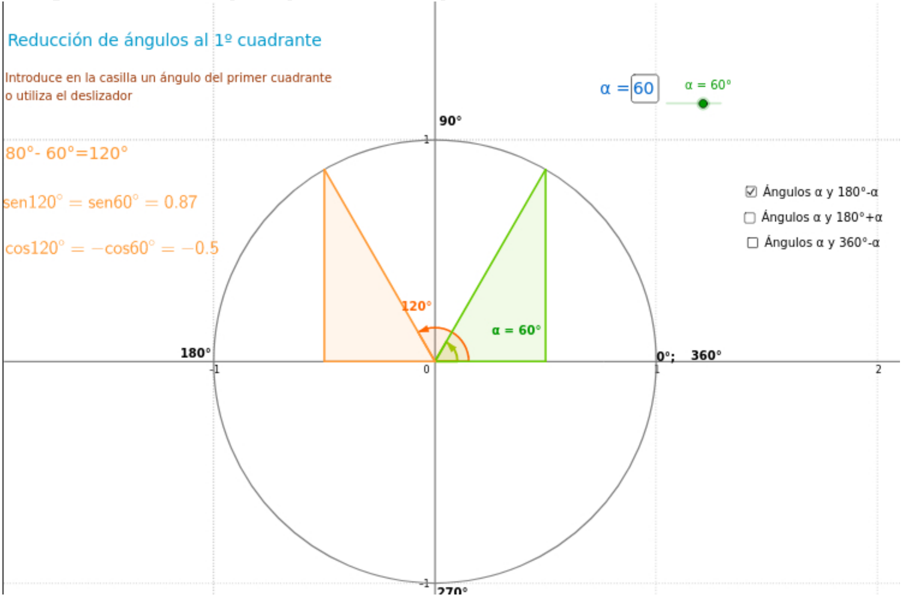
Es decir que

$\mathcal{T}$ se representa en el 2do cuadrante del plano $\mathbb{C}$

sobre la semirrecta que empieza en el origen, a 120° medidos des

en sentido antihorario

a distancia $2\sqrt{3}$ del origen sobre la misma semirrecta https://www.geogebra.org/m/WkR9RDuJ



Raíces Cuadradas

Si $0 \neq z \in \mathbb{C}$ entonces existen distintos w y $-w \in \mathbb{C}$ tales que

$$w^2 = z = (-w)^2$$

Ejemplos: • $i^2 = -1 = (-i)^2$

• $(\sqrt{3}i)^2 = (-\sqrt{3}i)^2 = -3$

• *Si* $z = -5 \Longrightarrow \pm w = \pm\sqrt{5}i$ *cumple* $(\pm w)^2 = (\pm\sqrt{5}i)^2 = -5$

Raíces Cuadradas

Ej. 3.

Calcular las raíces cuadradas de $z = 7 + 6\sqrt{2}i$.

Solución: Buscamos $w, -w \in \mathbb{C}$ tales que

$$w^2 = 7 + 6\sqrt{2}i = (-w)^2$$

Escribamos en forma binómica

$$w = x + yi \Longrightarrow w^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi + (yi)^2$$

$$= \underbrace{x^2 - y^2}_{parte\ \ real} + \underbrace{2xy}_{parte\ \ imaginaria} i$$

$$= 7 + 6\sqrt{2}i$$

Raíces Cuadradas

Obtenemos ecuaciones en las variables $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet\ x^2 - y^2 & = Re(z) = 7 \\ \bullet\ 2xy & = Im(z) = 6\sqrt{2} \implies y = \dfrac{3\sqrt{2}}{x} \end{cases}$$

$$x \neq 0 \implies 7 = x^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{x}\right)^2 = \frac{x^4 - 18}{x^2}$$

$$\implies 0 = x^4 - 18 - 7x^2$$

Raíces de la ecuación de grado 4: Cambiemos $u = x^2 > 0$ en $\mathbb{R}$

$$\implies 0 = u^2 - 18 - 7u \text{ con raíces } u_1 = 9,\ u_2 = -2$$

$\implies 0 < x^2 = u = 9$ es la única solución $\implies$ *despejemos* x, y

Raíces de la ecuación de grado 4: completemos cuadrados

$$\Longrightarrow 0 = x^4 - 18 - 7x^2 = \left(x^2 - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} - 18$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} + 18 = \frac{121}{4} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left|x^2 - \frac{7}{2}\right| = \frac{11}{2} \Leftrightarrow x^2 - \frac{7}{2} = \pm\frac{11}{2} \Longrightarrow x^2 = 9 \text{ ó bien } x^2 = -2 \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow 0 < x^2 = 9 \text{ es la única solución} \Longrightarrow \text{despejemos } y = \frac{3\sqrt{2}}{x}$$

$$x = 3 \Longrightarrow y = \sqrt{2}, \qquad x = -3 \Longrightarrow y = -\sqrt{2}$$

Por lo tanto, las dos raíces cuadradas son

$$w = 3 + \sqrt{2}i, \quad -w = -3 - \sqrt{2}i, \checkmark$$

Comprobación:

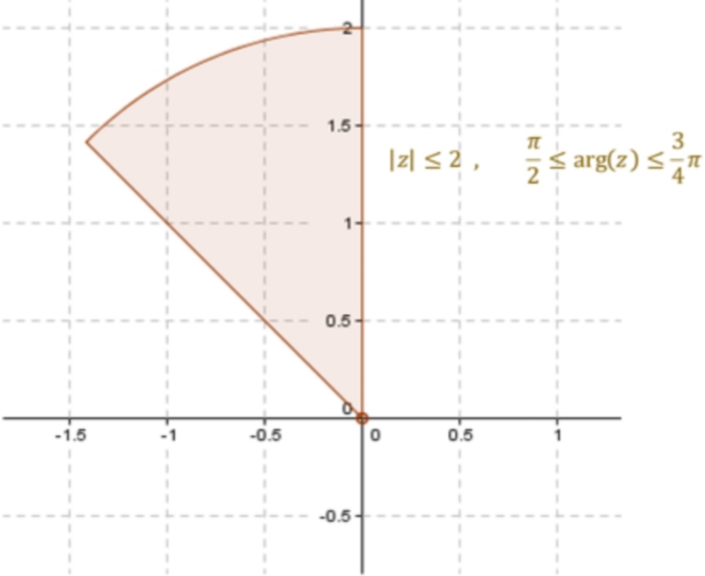
$$(\pm w)^2 = (3 + \sqrt{2}i)^2$$
$$= 9 + 6\sqrt{2}i + 2i^2$$
$$= 9 + 6\sqrt{2}i - 2 = 7 + 6\sqrt{2}i \checkmark$$

Regiones del plano $\mathbb{C}$

Ej. 4. a)

Hallar la región del plano los complejo que verifica las condiciones y graficar: $z : \dfrac{\pi}{2} \leq arg(z) \leq \dfrac{3\pi}{4}, \ |z| \leq 2$

- $z \in$ disco de radio 2, centrado en el origen
- $z \in$ 2do cuadrante
- $z = x + yi$ cumple $y \geq -x$



a) $z : \dfrac{\pi}{2} \leq arg(z) \leq \dfrac{3\pi}{4}, \ |z| \leq 2$

Ej. 4.

Hallar los complejos que verifican las condiciones y graficar:

b) $w : \dfrac{3\pi}{4} \leq arg(-iw) \leq \dfrac{5\pi}{4}$

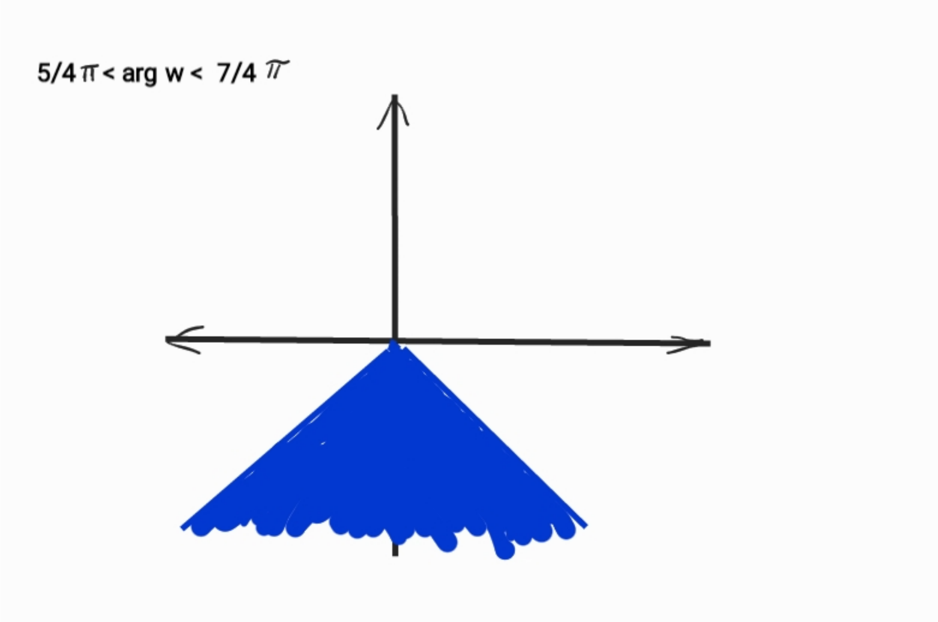
- $w \in$ región no acotada del plano
- $arg(-iw) = \underbrace{arg(-i)}_{=\frac{3\pi}{2}} + arg(w) - 2k\pi$

$$\Longrightarrow \frac{3\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} + arg(w) - 2k\pi \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi \leq arg(w) \leq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$arg(w) \in [0, 2\pi] \Longrightarrow k = 1 \Longrightarrow \frac{5\pi}{4} \leq arg(w) \leq \frac{7\pi}{4}$$

- $w \in$ semiplano inferior



b) Solución: $w : \frac{5\pi}{4} \leq arg(w) \leq \frac{7\pi}{4}$

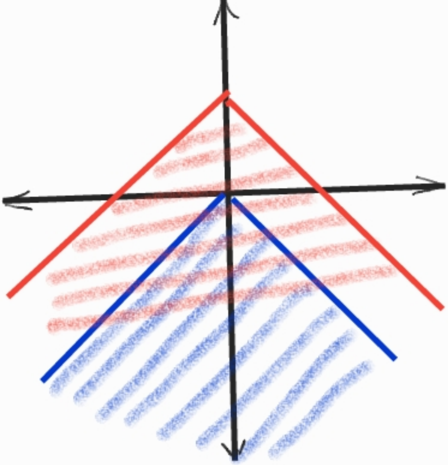
Regiones del plano $\mathbb{C}$

Ej. 4.

Hallar los complejos que verifican las condiciones y graficar.

$c)$ $z : \dfrac{5\pi}{4} \leq arg(z - 3i) \leq \dfrac{7\pi}{4}$

- $z - 3i = w$ del item b)
- $z = w + 3i$
- Traslademos cada w del item b) sumando $3i$ para obtener $z = w + 3i$



c) $w : \frac{5\pi}{4} \le arg(w) \le \frac{7\pi}{4} \Longrightarrow z = w + 3i : \frac{5\pi}{4} \le arg(z - 3i) \le \frac{7\pi}{4}$

Regiones del plano $\mathbb{C}$

Ej. 4. d)

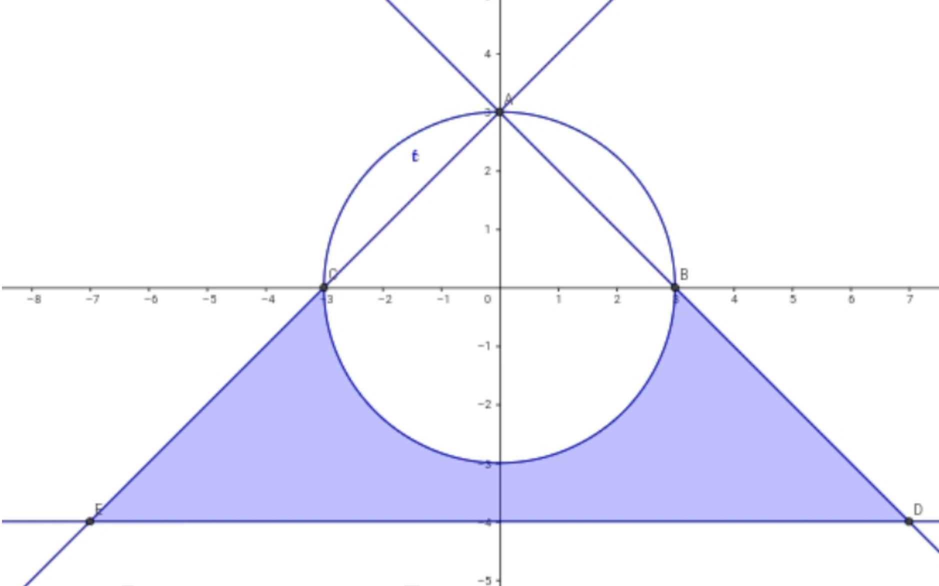
Hallar los complejos que verifican las condiciones y graficar.

$d)\;\; z : \dfrac{5\pi}{4} \leq arg(z - 3i) \leq \dfrac{7\pi}{4},\; |z| \geq 3,\; -4 \leq Im(z) \leq 0$

- $z \in$ región del item c)
- z está fuera del disco abierto de radio 3, centrado en el origen
- $z = x + yi$ cumple $-4 \leq y \leq 0$

$\implies$ z pertenece a la franja horizontal

entre las rectas $y = -4$ e $y = 0$



d) $\frac{5\pi}{4} \leq arg(z - 3i) \leq \frac{7\pi}{4}, \ |z| \geq 3, \ -4 \leq Im(z) \leq 0$

Ej 5. a)

Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$: $(2 - 2\sqrt{3}i)^{n+1} = (-1 - \sqrt{3}i) \cdot 2^{2n+1}$

Solución: Reescribamos

$$\textit{lado izquierdo} = (2 - 2\sqrt{3}i)^{n+1} = 2^{n+1}(1 - \sqrt{3}i)^{n+1}$$

$$= \textit{lado derecho} = -(1 + \sqrt{3}i) \cdot 2^n \cdot 2^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sqrt{3}i)^{n+1} = -(1 + \sqrt{3}i) \cdot 2^n = -\frac{(1 + \sqrt{3}i)}{2} \cdot 2^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^{n+1} = -\frac{(1 + \sqrt{3}i)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{n+1} = -\frac{(1+\sqrt{3}i)}{2}$$

Multipliquemos a ambos miembros por el inverso

$$z = \frac{(1+\sqrt{3}i)}{2} \Longrightarrow z^{-1} = \frac{(1-\sqrt{3}i)}{2}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{n+2} = -1$$

- Módulo: $1^{n+2} = |-1| = 1$ ✓
- Argumento:

$$arg\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{n+2} = (n+2)\ \underbrace{arg\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)}_{=5\pi/3} = \pi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow (n+2)\,\frac{5}{3}\pi = \pi + 2k\pi :\; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow (n+2)\cdot 5 = 3\cdot(1+2k) = 3+6k :\; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow (n+2)\cdot 5 \equiv 3 \; mod \; 6$$

$$\Leftrightarrow 5n \equiv -10+3 \equiv -1 \; mod \; 6$$

$$\Leftrightarrow -n \equiv -1 \Leftrightarrow n \equiv 1 \; mod \; 6$$

$$\Longrightarrow \; Soluciones = \{n \in \mathbb{N} : n = 6k+1 :\; k \in \mathbb{Z}\} \; \checkmark$$