Álgebra 1

Práctica 5: Sistemas de ecuaciones lineales de Congruencia y Teorema Chino del Resto

Patricia Jancsa

Viernes 21/5/2021

Ej. 1.

a) Determinar si existen y, en caso afirmativo, hallar todas las soluciones del sistema de congruencias

$$\begin{cases} x & \equiv 2 \; mod \; 4 \\ x & \equiv 13 \; mod \; 25 \end{cases}$$

¿Cuánto vale la mínima solución positiva?

Solución: $mcd(4:25) = 1$

$\Longrightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones en $\mathbb{Z}$

y una única solución módulo $100 = 4 \cdot 25$

¿Cómo se calculan?

$$\begin{cases} x & \equiv 2 \; mod \; 4 & \Longrightarrow & x = 4k + 2 : \; k \in \mathbb{Z} \\ x & \equiv 13 \; mod \; 25 & \Longrightarrow & x = 25m + 13 : \; m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x = 25m + 13 \equiv m + 1 \equiv 2 \mod 4$$

$$\Leftrightarrow m \equiv 1 \; mod \; 4$$

$$\Leftrightarrow m = 4q + 1 : \; q \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, $x = 25m + 13 = 25(4q + 1) + 13$

$$= 100q + 25 + 13$$

$$\Longrightarrow \; Soluciones = \{x = 100q + 38 : \; q \in \mathbb{Z}\} \checkmark$$

$\Longrightarrow$ La mínima solución positiva es $x_0 = 38$.

Comprobación

Reemplacemos en el sistema dado:

$$\begin{cases} x = \color{blue}{100q + 38} & \equiv 38 & \equiv 2 \; mod \; 4 \\ x = \color{blue}{100q + 38} & \equiv 38 & \equiv 13 \; mod \; 25 \checkmark \end{cases}$$

Ej. 1. b)

Hallar todas las soluciones del sistema de congruencias

$$\begin{cases} x & \equiv 118 \; mod \; 20 \\ x & \equiv 238 \; mod \; 50 \end{cases}$$

$Mcd(20:50) = 10 \neq 1 \Longrightarrow$ no garantiza soluciones en $\mathbb{Z}$

$$Calculemos: \boxed{20 = 2^2 \cdot 5, \; 50 = 2 \cdot 5^2}$$

C. Auxiliares

$$x \equiv 118 \; mod \; 20 \Leftrightarrow 20 | (x - 118)$$

$$\Leftrightarrow 4 | (x - 118) \; \wedge \; 5 | (x - 118)$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 118 \; mod \; 4 \; \wedge \; x \equiv 118 \; mod \; 5$$

Del mismo modo,

$$x \equiv 238 \; mod \; 50 \Leftrightarrow 50|(x - 238)$$

$$\Leftrightarrow 25|(x - 238) \; \wedge \; 2|(x - 238)$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 238 \; mod \; 25 \; \wedge \; x \equiv 238 \; mod \; 2$$

Teorema Chino del Resto

$$\begin{cases} x \equiv 118 & \equiv 18 \; mod \; 20 \Leftrightarrow \begin{cases} x & \equiv 2 \; mod \; 4 \Longrightarrow x \equiv 0 \; mod \; 2 \\ x & \equiv 3 \; mod \; 5 \end{cases} \\ x \equiv 238 & \equiv 38 \; mod \; 50 \Leftrightarrow \begin{cases} x & \equiv 0 \; mod \; 2 \\ x & \equiv 13 \; mod \; 25 \Longrightarrow x \equiv 3 \; mod \; 5 \end{cases} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ las ecuaciones son compatibles y el sistema tiene soluciones en $\mathbb{Z}$

Además, el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x & \equiv 2 \; mod \; 4 \\ x & \equiv 13 \; mod \; 25 \end{cases}$$

cuyas soluciones son las del item a):

$$\Longrightarrow \; Soluciones \; = \{x = 100q + 38 : \; q \in \mathbb{Z}\} \checkmark$$

Ej. 2.

Determinar si existen y, en caso afirmativo, hallar todas las soluciones de cada sistema de congruencias

$$a)\ \begin{aligned} x &\equiv 160\ mod\ 14 \\ x &\equiv 148\ mod\ 35 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} n &\equiv 36\ mod\ 21 \\ n &\equiv 54\ mod\ 45 \\ n &\equiv 89\ mod\ 35 \end{aligned}$$

Solución: a) $mcd(14:35) = 7 \neq 1$

$\Longrightarrow$ no garantiza que exista alguna solución del sistema

$$14 = 2 \cdot 7, \qquad 35 = 5 \cdot 7$$

$$\begin{cases} x \equiv 160 \quad \equiv 6 \; mod \; 14 \Leftrightarrow \begin{cases} x & \equiv 6 \; mod \; 7 \\ x & \equiv 0 \; mod \; 2 \end{cases} \\ x \equiv 148 \quad \equiv 8 \; mod \; 35 \Leftrightarrow \begin{cases} x & \equiv 3 \; mod \; 5 \\ x & \equiv 1 \; mod \; 7 \Longrightarrow x \not\equiv 6 \; mod \; 7 \end{cases} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ las ecuaciones son incompatibles y el sistema no tiene ninguna solución

Ej. 2. b)

$$\begin{cases} n & \equiv 36 \ mod \ 21 \\ n & \equiv 54 \ mod \ 45 \\ n & \equiv 89 \ mod \ 35 \end{cases}$$

Solución b) $21, \ 45, \ 35$ no son coprimos dos a dos

$\Longrightarrow$ T. Chino del Resto no garantiza que exista alguna solución del sistema

$$\begin{cases} x \equiv 36 \equiv 15 \ mod \ 21 & \Leftrightarrow \begin{cases} x & \equiv 1 \ mod \ 7 \\ x & \equiv 0 \ mod \ 3 \end{cases} \\ x \equiv 54 \equiv 9 \ mod \ 45 & \Leftrightarrow \begin{cases} x & \equiv 4 \ mod \ 5 \\ x & \equiv 0 \ mod \ 9 \Longrightarrow x \equiv 0 \ mod \ 3 \end{cases} \\ x \equiv 89 \equiv 19 \ mod \ 35 & \Leftrightarrow \begin{cases} x & \equiv 4 \ mod \ 5 \\ x & \equiv 5 \ mod \ 7 \Longrightarrow x \not\equiv 1 \ mod \ 7 \end{cases} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ las ecuaciones son incompatibles y el sistema no tiene ninguna solución

Ej. 3.

Se sabe que el resto de dividir a n por 18 es 2 y el resto de dividir a n por 20 es 6. Calcular el resto de dividir a n por 360.

$$Datos: \begin{cases} n & \equiv 2 \; mod \; 18 \quad \Leftrightarrow \quad 18 | (n-2) \\ n & \equiv 6 \; mod \; 20 \quad \Leftrightarrow \quad 20 | (n-6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \equiv 2 \quad mod\ 18 \Leftrightarrow \begin{cases} n & \equiv 2\ mod\ 2 \Longrightarrow n \equiv 0\ mod\ 2 \\ n & \equiv 2\ mod\ 9 \end{cases} \\ n \equiv 6 \quad mod\ 20 \Leftrightarrow \begin{cases} n & \equiv 6\ mod\ 4 \Longrightarrow n \equiv 2\ mod\ 4 \\ n & \equiv 6\ mod\ 5 \Longrightarrow n \equiv 1\ mod\ 5 \end{cases} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ las ecuaciones son compatibles
$\Longrightarrow$ el sistema tiene soluciones en $\mathbb{Z}$
y una única solución módulo $9 \cdot 5 \cdot 4 = 180$

entonces n debe cumplir

$$\begin{cases} n & \equiv 2\ mod\ 9 \\ n & \equiv 1\ mod\ 5 \\ n & \equiv 2\ mod\ 4 \end{cases}$$

Soluciones módulo $180 = 9 \cdot 5 \cdot 4$

$$\begin{cases} n \equiv 2 \; mod \; 9 & \Leftrightarrow n = 9k + 2 \\ n \equiv 1 \; mod \; 5 & \Leftrightarrow n = 9k + 2 \equiv 4k + 2 \equiv 1 \; mod \; 5 \\ & \Leftrightarrow k \equiv 1 \Leftrightarrow k = 5m + 1 \\ & \\ & \Leftrightarrow n = 9(5m + 1) + 2 \\ & \\ n \equiv 2 \; mod \; 4 & \Leftrightarrow n = 9 \cdot 5 \cdot m + 11 \equiv 2 \; mod \; 4 \\ & \Leftrightarrow 1 \cdot 1 \cdot m + 11 \equiv m + 3 \equiv 2 \\ & \Leftrightarrow m \equiv 3 \; mod \; 4 \\ & \Leftrightarrow m = 4 \cdot q + 3 \\ & \\ & \Leftrightarrow n = 9 \cdot 5 \cdot (4 \cdot q + 3) + 11 \\ & \Leftrightarrow n = 180 \cdot q + 146 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ el resto de dividir a n por 180 es $\text{resto}(n)_{180} = 146$

¿Qué podemos decir del resto de dividir a x por 360?

$$360 = 2 \cdot 180$$

Ej. 3. b)

Calcular los posibles restos de dividir a n por 360

Solución:

$$n = 180 \cdot q + 146$$

Pero $360 = 2 \cdot 180$,

$$q = 2 \cdot d + r : r = 0, 1 \Longrightarrow n = 180 \cdot (2 \cdot d + r) + 146$$
$$\Longrightarrow n = 360 \cdot d + \underbrace{180r + 146}_{resto\ \ mod\ \ 360}$$

entonces los posibles restos mod 360 son

$$\Longrightarrow \begin{cases} r = 0 & \Longrightarrow \quad resto_{360}(n) = 146 \\ r = 1 & \Longrightarrow \quad resto_{360}(n) = 180 + 146 = 326 \ \checkmark \end{cases}$$

Ej. 4.

a) Calcular el resto de dividir a x por 105 sabiendo que

$$\begin{cases} 23x & \equiv 228 \ mod \ 21 \\ 22x & \equiv 252 \ mod \ 15 \end{cases}$$

b) Calcular los posibles restos de dividir a x por 420

Solución: $mcd(21:15) = 3 \neq 1$

$\Longrightarrow$ hay que verificar que el sistema sea compatible para concluir que tiene infinitas soluciones en $\mathbb{Z}$

y una única solución módulo

mínimo común múltiplo $[21:15]$

$= mcm[(3 \cdot 7):(3 \cdot 5)] = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

Achiquemos los números

$$\begin{cases} 23x \equiv 228 \; mod \; 21 \\ 22x \equiv 252 \; mod \; 15 \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow 2x \equiv 18 \; mod \; 21 \\ \Leftrightarrow 7x \equiv 12 \; mod \; 15 \end{matrix}$$

$\Longrightarrow$ trabajemos con éste

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2x \equiv 18 \; mod \; 21 & \Longrightarrow \begin{cases} 2x & \equiv 4 \; mod \; 7 \Leftrightarrow x \equiv 2 \; mod \; 7 \\ 2x & \equiv 0 \;\; \Leftrightarrow x \equiv 0 \; mod \; 3 \end{cases} \\ 7x \equiv 12 \; mod \; 15 & \Longrightarrow \begin{cases} 7x & \equiv 2 \; mod \; 5 \Leftrightarrow x \equiv 1 \; mod \; 5 \\ 7x & \equiv 0 \; mod \; 3 \Leftrightarrow x \equiv 0 \; mod \; 3 \end{cases} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ el sistema es compatible

$\Longrightarrow$ tiene infinitas soluciones en $\mathbb{Z}$

y una única solución módulo 105

Soluciones módulo 105

$$\Longrightarrow \begin{cases} x \equiv 2 \ mod\ 7 & \Leftrightarrow x = 7k + 2 \\ \\ x \equiv 0 \ mod\ 3 & \Leftrightarrow x = 7k + 2 \equiv 0 \Leftrightarrow k \equiv -2 \equiv 1 \ mod\ 3 \\ & \Leftrightarrow k = 3m + 1 \\ \\ & \Leftrightarrow x = 7(3m + 1) + 2 \\ \\ x \equiv 1 \ mod\ 5 & \Leftrightarrow x = 7 \cdot 3 \cdot m + 9 \equiv 1 \ mod\ 5 \\ & \Leftrightarrow m + 9 \equiv 1 \Leftrightarrow m \equiv 2 \ mod\ 5 \\ & \Leftrightarrow m = 5 \cdot q + 2 \\ \\ & \Leftrightarrow x = 7 \cdot 3 \cdot (5 \cdot q + 2) + 9 \\ \\ & \Leftrightarrow x = 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot q + 51 \end{cases}$$

$$x = 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot q + 51$$

$$\Longrightarrow x = 105 \cdot q + 51$$

$\Longrightarrow$ el resto de dividir a x por 105 es $\text{resto}(x)_{105} = 51$

¿Qué podemos decir del resto de dividir a x por 420?

$$420 = 4 \cdot 105$$

Ej. 4. b)

Calcular los posibles restos de dividir a x por 420

Solución:

$$x = 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot q + 51 = 105 \cdot q + 51$$

Pero $420 = 4 \cdot 105$,

$$q = 4 \cdot d + r : r = 0, 1, 2, 3 \Longrightarrow x = 105 \cdot (4 \cdot d + r) + 51$$
$$\Longrightarrow x = 420 \cdot d + \underbrace{105r + 51}_{resto \ \ mod \ \ 420}$$

entonces los posibles restos $\mathrm{mod} \ \ 420$ son

$$\Longrightarrow \begin{cases} r = 0 & \Longrightarrow \ \ resto_{420} = 51 \\ r = 1 & \Longrightarrow \ \ resto_{420} = 105 + 51 = 156 \\ r = 2 & \Longrightarrow \ \ resto_{420} = 2 \cdot 105 + 51 = 261 \\ r = 3 & \Longrightarrow \ \ resto_{420} = 3 \cdot 105 + 51 = 366 \end{cases}$$

Ej. 5.

El pasado lunes en una escuela de 3000 estudiantes

- se forman en filas de a 19 y sobran 7,
- se forman en filas de a 20 y en una fila faltan 3,
- se forman en filas de a 21 y sobra 1.

¿Cuántos ausentes hubo ese día?

Solución: Sea x= cantidad de estudiantes que asistieron

$$Datos: \begin{cases} x \equiv 7 & mod\ 19 \\ x \equiv -3 & mod\ 20 \\ x \equiv 1 & mod\ 21 \end{cases}$$

$mcd(19:20) = (19:21) = (20:21) = 1$

$\Longrightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones en $\mathbb{Z}$
y una única solución módulo $7980 = 19 \cdot 20 \cdot 21$

Soluciones módulo $7980 = 19 \cdot 20 \cdot 21$

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
x \equiv 7 \ mod \ 19 & \Leftrightarrow x = 19k + 7 \\
x \equiv -3 \ mod \ 20 & \Leftrightarrow x = 19k + 7 \equiv -k + 7 \equiv -3 \ mod \ 20 \\
 & \Leftrightarrow k \equiv 10 \Leftrightarrow k = 20m + 10 \\
 & \\
 & \Leftrightarrow x = 19(20m + 10) + 7 \\
 & \\
x \equiv 1 \ mod \ 21 & \Leftrightarrow x = 19 \cdot 20 \cdot m + 197 \equiv 1 \ mod \ 21 \\
 & \Leftrightarrow (-2)(-1)m + 189 + 8 \equiv 2m + 8 \equiv 1 \\
 & \Leftrightarrow 2m \equiv -7 \Leftrightarrow m \equiv 7 \ mod \ 21 \\
 & \Leftrightarrow m = 21 \cdot q + 7 \\
 & \\
 & \Leftrightarrow x = 19 \cdot 20 \cdot (21 \cdot q + 7) + 197 \\
 & \Leftrightarrow x = 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot q + 19 \cdot 20 \cdot 7 + 197 \\
 & \Leftrightarrow x = 7980 \cdot q + 2857
\end{array}
\right.
$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 2857 \ mod \ 7980$$

$$\Leftrightarrow x = 7980 \cdot q + 2857 : \ q \in \mathbb{Z}$$

Respuesta: Faltaron $3000 - 2857 = 143$ ✓

Ej. 6.

En un evento deportivo participan entre 10.000 y 15.000 atletas y se observa que

- al formarse en filas de a 19, sobran 7,
- al formarse en filas de a 20, en una fila faltan 3,
- al formarse en filas de a 21, sobra 1.

¿Cuántos deportistas participaron?

Solución: Sea x= cantidad de participantes

$$Datos: \begin{cases} x & \equiv 7 \; mod \; 19 \\ x & \equiv -3 \; mod \; 20 \\ x & \equiv 1 \; mod \; 21 \end{cases}$$

$mcd(19:20) = (19:21) = (20:21) = 1$

$\Longrightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones en $\mathbb{Z}$

y una única solución módulo $7980 = 19 \cdot 20 \cdot 21$

Soluciones módulo $7980 = 19 \cdot 20 \cdot 21$

$$\Leftrightarrow x \equiv 2857 \ mod \ 7980$$

$$\Leftrightarrow x = 7980 \cdot q + 2857 : \ q \in \mathbb{Z}$$

Valores posibles

$$2857, \ 7980 + 2857, \ 2 \cdot 7980 + 2857, \ etc$$

Sabiendo que $10.000 < x < 15.000$ se obtiene

Respuesta: Asistieron $x = 7980 + 2857 = 10837$ atletas ✓

Ej. 7.

¿Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que su dígito de las unidades sea 9 y además $n^3 + 3^n$ sea divisible por 5?

Sea $n \in \mathbb{N}$ como en el enunciado: el dígito de las unidades es 9

$$\Longrightarrow n \equiv 9 \ mod\ 10$$

$$\Longrightarrow n \equiv 9 \equiv 4 \ mod\ 5 \wedge \ n \equiv 9 \equiv 1 \ mod\ 2$$

Luego, la condición $5 | n^3 + 3^n$ significa que

$$0 \equiv n^3 + 3^n \equiv 4^3 + 3^n \equiv (-1)^3 + 3^n \equiv -1 + 3^n \ mod\ 5$$

$$\Leftrightarrow 1 \equiv 3^n \ mod\ 5$$

Tenemos $\Leftrightarrow 1 \equiv 3^n \ mod\ 5$
Estudiemos las potencias de 3^n mod 5:

$$3^4 = 81 \equiv 1 \ mod\ 5$$

Dividamos a n por 4 $\Longrightarrow n = 4q + r, \quad r = 0, 1, 2, 3$, luego

$$3^n = 3^{4q+r} \equiv (3^4)^q \cdot 3^r \equiv 3^r \ mod\ 5$$

Tenemos

$$r = 0 \Longrightarrow 3^n \equiv 3^0 \equiv 1 \ mod\ 5$$

$$r = 1 \Longrightarrow 3^n \equiv 3^1 \equiv 3 \ mod\ 5$$

$$r = 2 \Longrightarrow 3^n \equiv 3^2 \equiv 4 \ mod\ 5$$

$$r = 3 \Longrightarrow 3^n \equiv 3^3 \equiv 2 \ mod\ 5$$

Por lo tanto, debe ser $n \equiv 0 \ mod\ 4$

Resumiendo, obtenemos

$$\begin{cases} n \equiv 0 \; mod \; 4 & \Longrightarrow \quad n \equiv 0 \; mod \; 2 \\ n \equiv 4 \; mod \; 5 & \\ n \equiv 1 \; mod \; 2 & \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ No existe ningún $n \in \mathbb{N}$ que verifique todas las condiciones