Álgebra 1

Práctica 3: Combinatoria (continuación)

Patricia Jancsa

Viernes 23/4/2021

Número Combinatorio

$$\# \left\{ \begin{array}{c} \text{subconjuntos de k elementos} \\ \text{de un conjunto de N elementos} \end{array} \right\}$$

$$= \binom{N}{k} = \frac{N!}{(N-k)!k!}$$

Número Combinatorio

Ejemplo 1. ¿Cuántas ensaladas distintas de 3 ingredientes se pueden formar con 7 ingredientes a disposición?

Número Combinatorio

Importan sólo cuáles son los elementos pero no importa el orden en el que se eligen

$$\{tomate,\ apio,\ zanahoria\} = \{tomate,\ zanahoria,\ apio\}$$

$$= \{apio,\ tomate, zanahoria\} = \{apio,\ zanahoria,\ tomate\}$$

$$= \{zanahoria,\ apio,\ tomate\} = \{zanahoria,\ tomate,\ apio\}$$

$\Rightarrow$ las 3!=6 permutaciones posibles de 3 elementos

dan el mismo conjunto

Número Combinatorio

$$\# \textit{ ensaladas distintas}$$

$$= \# \left\{ \begin{array}{c} \text{subconjuntos de k=3 elementos} \\ \text{de un conjunto de N=7 elementos} \end{array} \right\}$$

$$= \binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!}$$

Número Combinatorio y binomio de Newton

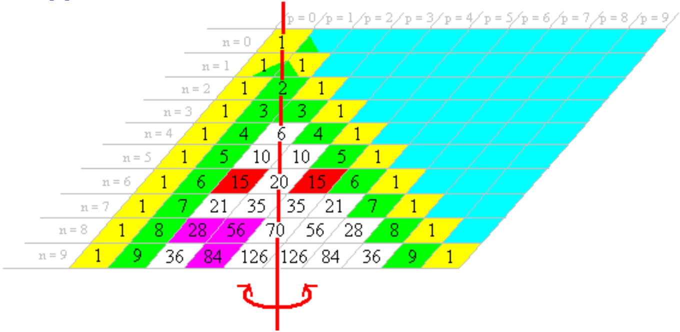
- $$\binom{N}{k} = \frac{N!}{(N-k)!\,k!} = \binom{N}{N-k}$$

Además, dado que $0! = 1$

- $$\binom{N}{0} = \frac{N!}{N!\,0!} = 1 = \binom{N}{N}$$
- $$\binom{N-1}{k} + \binom{N-1}{k-1} = \binom{N}{k} \;\forall\, 1 \leq k \leq N-1$$
- $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\Longrightarrow 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \#\mathcal{P}(X_n)$$

Triángulo de Pascal



$$\binom{N}{k-1} + \binom{N}{k} = \binom{N+1}{k}$$

$$\binom{6}{1} + \binom{6}{2} = \binom{7}{2}$$

$$6 \quad + 15 = 21$$

Triángulo de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \cdots\cdots\cdots & & & &
\end{array}
$$

Triángulo de Pascal

$$1$$

$$1 \qquad 1$$

$$1 \qquad 2 \qquad 1$$

$$1 \qquad 3 \qquad 3 \qquad 1$$

$$1 \qquad \underbrace{4}_{1+3} \qquad \underbrace{6}_{3+3} \qquad \underbrace{4}_{3+1} \qquad 1$$

$$1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1$$

$$1 \qquad 6 \qquad 15 \qquad 20 \qquad 15 \qquad 6 \qquad 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Número Combinatorio y Binomio de Newton

Ej 2. a) Calcular

$$\mathcal{S} := 2 + \sum_{k=1}^{3n-1} \left[\binom{3n-1}{k} + \binom{3n-1}{k-1} \right]$$

b) Probar que $\binom{3n}{k} < 8^n \ \forall\ 0 \leq k \leq 3n \ \forall\ n \in \mathbb{N}$

Solución: $$\mathcal{S} := 2 + \sum_{k=1}^{3n-1} \left[\binom{3n-1}{k} + \binom{3n-1}{k-1} \right]$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{3n-1} \binom{3n}{k} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} 1^k 1^{3n-k} = (1+1)^{3n} = 2^{3n} = (2^3)^n = 8^n$$

b) Inmediato de a) pues todos los términos son positivos:

$$\sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} = (1+1)^{3n} = 2^{3n} = 8^n$$

$\Longrightarrow$ cada término es menor que la suma:

$$\binom{3n}{k} < 8^n \quad \checkmark$$

Liga de la justicia

Ej 3. Marvel dispone de 10 parejas de superhéroes y decide hacer ediciones semanales de comics eligiendo cada vez 4 superhéroes. Calcular cuánto tiempo durará la serie si

a) en cada capítulo se eligen 4 héroes (sin restricciones).

b) las nuevas ligas de la justicia deben incluir al menos una pareja.


JUSTICE
LEAGUE

Liga de la justicia

Ej 3. Marvel dispone de 10 parejas de superhéroes y decide hacer ediciones semanales de comics eligiendo cada vez 4 superhéroes. Calcular cuánto tiempo durará la serie si
a) en cada capítulo se eligen 4 héroes (sin restricciones).

$$\#\{\textit{equipos de } 4\}$$

$$= \#\{\textit{subconjuntos de } 4 \textit{ elementos de uno de } 20\}$$

$$= \binom{20}{4} = \frac{20!}{16!\,4!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4!} = 4845$$

$$1 \text{ año} = 52 \textit{ semanas} \Longrightarrow \frac{4845}{52} = 93 \text{ años}$$

b) En cada capítulo se eligen 4 héroes entre los cuales se quiere incluir al menos una pareja

$\Longrightarrow$ 2 casos disjuntos:

- el equipo incluye sólo una pareja (y 2 héroes más desapareados)
- el equipo incluye dos parejas

$$\Longrightarrow \#\mathcal{P} = 10 \cdot \binom{9}{2} \cdot 2^2 + \binom{10}{2} = 1485$$

$$1 \text{ año} \;=\; 52 \; \textit{semanas} \Longrightarrow \frac{1485}{52} = 28 \;\; \text{años}$$

Otra forma de contar

$$\mathcal{P} = \{\text{Equipos de 4 héroes con al menos una pareja}\}$$

es el complemento de

$$\mathcal{N} = \{\text{Equipos de 4 héroes sin ninguna pareja}\}$$

$$\Longrightarrow \#\mathcal{N} = \binom{10}{4} \cdot 2^4$$

$$\Longrightarrow \#\mathcal{P} = \textit{Total} \; - \#\mathcal{N}$$

$$= \binom{20}{4} - \binom{10}{4} \cdot 2^4 = 4845 - 3360 = 1485$$

Ej 4. Anagramas con repetición

Consideremos los anagramas de la palabra
(sin acento: las dos óes se consideran iguales):

$$METODOLOGICAMENTE$$

a) ¿Cuántas hay en total?

b) ¿Cuántas hay que empiecen con consonante?

c) ¿Cuántas hay con la condición de que no tengan dos consonantes seguidas?

d) ¿Cuántas hay con la condición de que todas las vocales estén juntas?

e) ¿Cuántas hay con la condición de que las vocales aparezcan en orden alfabético?

$$\{\textit{Anagramas}\}$$

$$= \Big\{\text{permutaciones de las mismas letras}$$

$$\text{teniendo en cuenta las repeticiones}\Big\}$$

$$METODOLOGICAMENTE$$

- 17 letras en total, con repeticiones:

$$M \times 2,\ E \times 3,\ T \times 2,\ O \times 3$$

- Si fueran 17 letras distintas $\Longrightarrow \#$ permutaciones $= 17!$

¿Cómo se descuentan las repeticiones?

$$METODOLOGICAMENTE$$

es la misma palabra que

$$METODOLOGICAMENTE$$

y también que

$$METODOLOGICAMENTE$$

$$METODOLOGICAMENTE$$

$$METODOLOGICAMENTE$$

$$METODOLOGICAMENTE$$

$\Longrightarrow$ las $3! = 6$ permutaciones dan la misma palabra

$\Longrightarrow$ hay que dividir por la cantidad de permutaciones de cada letra que se repite: $M \times 2$, $E \times 3$, $T \times 2$, $O \times 3$

Por lo tanto, teniendo en cuenta las repeticiones

$$\Longrightarrow \# \text{ anagramas} = \frac{17!}{2!2!3!3!} \checkmark$$

Ej 3. Anagramas con repetición

b) ¿Cuántas hay que empiecen con consonante?

$$METODOLOGICAMENTE \Longrightarrow \text{ 9 } consonantes, \text{ 8 } vocales$$

$$\boxed{\underline{C} \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \cdots \ \cdot}$$

$\Longrightarrow$ sólo 9 elecciones posibles para la primera letra

$$\boxed{\underline{9} \cdot \underline{16} \cdot \underline{15} \cdot \underline{14} \cdot \underline{13} \cdots \underline{2} \cdot \underline{1}}$$

dividiendo por las permutaciones de letras repetidas

$\Longrightarrow$ # anagramas que empiezan con consonante

$$= \frac{9 \cdot 16!}{2!2!3!3!} \checkmark$$

Ej 4. Anagramas con repetición

c) ¿Cuántas hay con la condición de que no tengan dos consonantes seguidas?

$METODOLOGICAMENTE \Longrightarrow$ 9 *consonantes*, 8 *vocales*

$\Longrightarrow$ hay una única disposición alternando las consonantes

$$\boxed{\underline{C} \cdot \underline{V} \cdot \underline{C} \cdot \underline{V} \cdot \underline{C} \cdot \underline{V} \cdot \underline{C} \cdot \underline{V} \cdot \underline{C} \cdot \underline{V} \cdot \underline{C} \cdot \underline{V} \cdot \underline{C} \cdot \underline{V} \cdot \underline{C} \cdot \underline{V} \cdot \underline{C}}$$

$\Longrightarrow$ sólo se deben permutar las vocales en sus lugares (fijos) y las consonantes en sus lugares (fijos)

$$\Longrightarrow \#anagramas = \frac{9!\,8!}{2!2!3!3!} \checkmark$$

Ej 4. Anagramas con repetición

d) ¿Cuántas hay con la condición de que todas las vocales estén juntas ?

METODOLOGICAMENTE

$\Longrightarrow$ 9 consonantes

+8 vocales que agrupamos en una sola $\mathcal{V}$

$\Longrightarrow$ 10 caracteres $= \{9 \text{ consonantes } + \mathcal{V}\}$

$\Longrightarrow$ hay 10! permutaciones de los 10 caracteres

$$\boxed{\underline{\mathcal{V}} \cdot \underline{C} \cdot \underline{C} \cdot \underline{C} \cdot \underline{C} \cdot \underline{C} \cdot \underline{C} \cdot \underline{C} \cdot \underline{C} \cdot \underline{C}}$$

hay que multiplicar por las permutaciones de las vocales

$\Longrightarrow$ # anagramas con todas las vocales juntas

$$= \frac{10!8!}{2!2!3!3!} \checkmark$$

Ej 4. Anagramas con repetición

e) ¿Cuántas hay con la condición de que las vocales aparezcan en orden alfabético?

$$METODOLOGICAMENTE$$

- $\Longrightarrow$ hay que elegir 8 lugares para las 8 vocales que se colocan luego en orden alfabético
- no permutar las vocales
- permutar las consonantes ubicadas en los lugares que quedaron libres

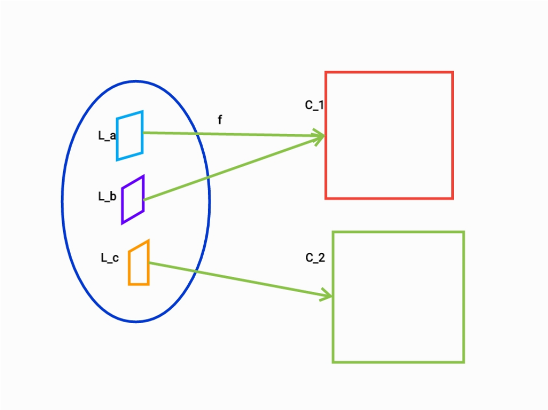
$$\Longrightarrow \#anagramas = \frac{\binom{17}{8}\,9!}{2!2!} = \frac{17!}{8!\;2!2!} \checkmark$$

Número Combinatorio y Funciones

Ej 5. Sean

$$A = \{1, 2, \cdots, n\} \text{ y } B = \{1, 2\}$$

Probar que la cantidad de funciones sobreyectivas de A en B es el doble de la cantidad de relaciones de equivalencia en A que tienen exactamente 2 clases. ¿Cuál es ese número?



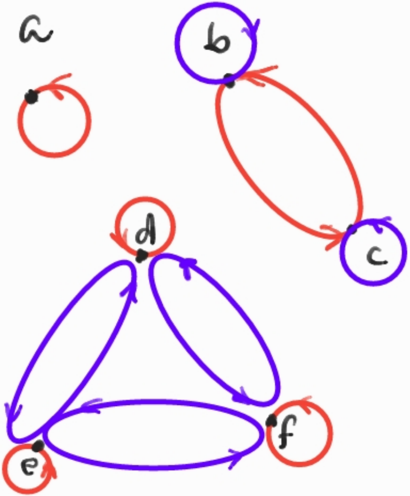
$$\#\{\text{Funciones sobreyectivas } f : A \to B\}$$

$$= \#\{\text{Funciones } f : \{n \textit{ libros}\} \to \{2 \textit{ cajas}\}\text{: ninguna caja vacía}\}$$

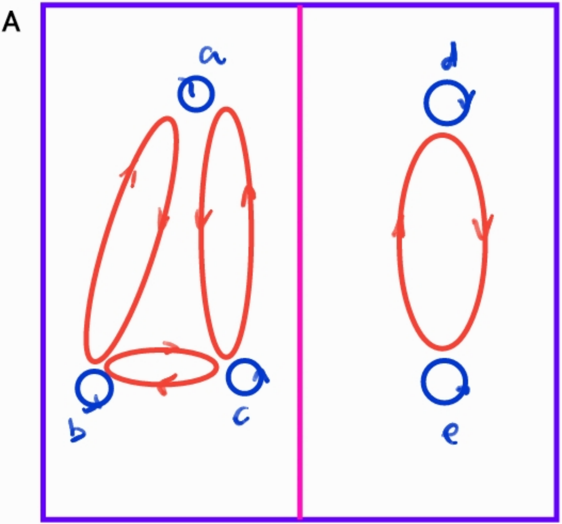
Si definimos $f_1(k) = 1 \ \forall k$, $f_2(k) = 2 \ \forall k$ las funciones constantes, entonces

$$\#\{\text{Todas las funciones } f : A \to B, f \neq f_1, f_2\} = 2^n - 2$$

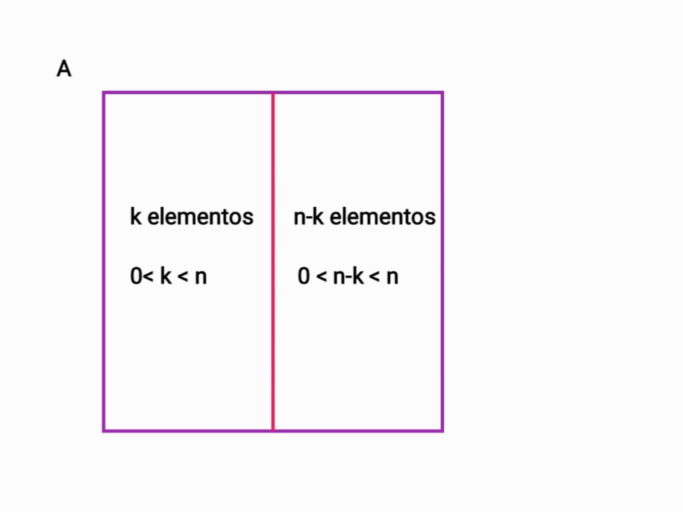
Relaciones de equivalencia



Relaciones de equivalencia



Cada R relación de equivalencia en A con exactamente 2 clases se corresponde con una partición de A:



Cada R relación de equivalencia en A que tiene exactamente 2 clases

$$\leftrightarrow \quad \text{partición} \;\; A = A_1 \cup A_2$$

donde $x, y \in A_j \Leftrightarrow x \sim y$, para cada $j = 1, 2$
¿Cuántas hay?

$A = A_1 \cup A_2 \leftrightarrow$ elección de k elementos distintos de A :

$$A_1, A_2 \neq \emptyset \implies 1 \leq k \leq n-1$$

$$\# \left\{ \begin{array}{c} \text{subconjuntos de k elementos} \\ \text{de un conjunto de n elementos} \end{array} \right\}$$

$$= \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Atención: intercambiar A_1 con A_2 da la misma relación,

$$\Longrightarrow \#\{\text{ Relaciones de equivalencia en } A \text{ con exactamente 2 clases}\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}_{2^n} - \binom{n}{0} - \binom{n}{n} \right] = \frac{1}{2} \cdot (2^n - 2) \checkmark$$

Cardinal del conjunto de partes

Si

$$\#X = n \Longrightarrow \#\mathcal{P}(X) = 2^n$$

Este número se puede pensar como

$$\#\{\text{funciones } f : X \to \ \{1,2\}\} = 2^n$$

También, si llamamos $X_k =$ unión de subconjuntos de X de k elementos, entonces

$$\#\mathcal{P}(X) = \#\cup_{k=0}^{n} X_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$