Álgebra 1

Práctica 2: Naturales e Inducción

Patricia Jancsa

Martes 9/4/2021

Efecto dominó

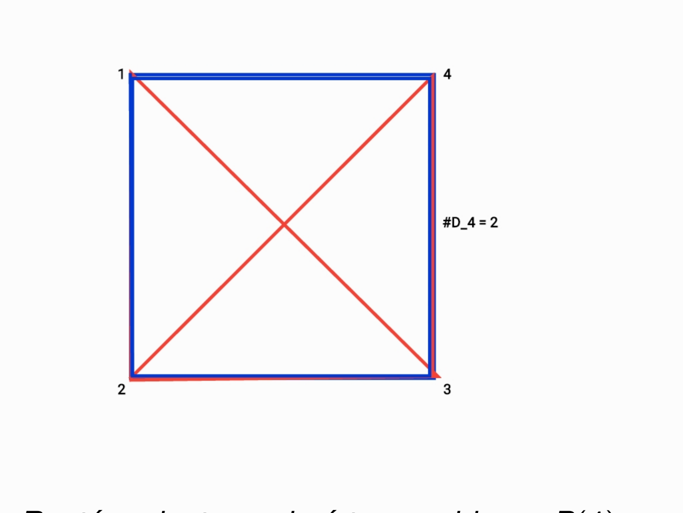
Ej 1. Calcular la cantidad de diagonales de un polígono convexo de n lados.

Polígono convexo: contiene todos los segmentos entre dos puntos cualesquiera

Estrellas $\Rightarrow$ no son convexos

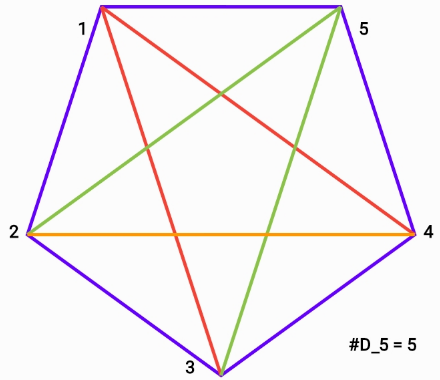
Efecto dominó

Ej 1. Calcular la cantidad de diagonales de un polígono

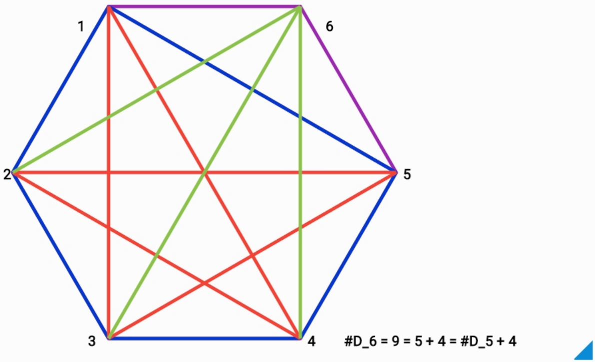


Rectángulo, trapecio ó trapezoide $\Rightarrow P(4): \quad \#D_4 = 2$

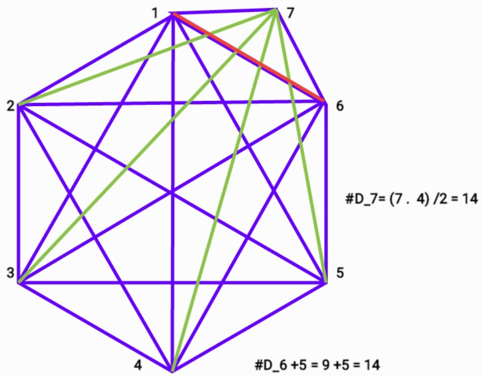
trapezoide = cuadrilátero convexo sin lados paralelos



$$Pentágono \;\; \Rightarrow P(5): \quad \#D_5 = 5 = 2 + 3$$
$$= \frac{5(5-3)}{2}$$



$$\textit{Hexágono} \Rightarrow P(6): \quad \#D_6 = 9 = 5 + 4$$
$$= \frac{6(6-3)}{2}$$



$$\textit{Heptágono} \Rightarrow P(7): \quad \# D_7 = 14 = 9 + 5$$
$$= \frac{7(7-3)}{2}$$

Ej 1. Probar que la cantidad de diagonales de un polígono convexo de n lados es $\#D_n = \dfrac{n(n-3)}{2} \quad \forall\, n \geq 4,\; n \in \mathbb{N}$

Solución: por inducción.

Caso base: $P(4)$: $\#D_4 = 2$ ✓

Probemos el paso inductivo:

$$\#D_n = \frac{n(n-3)}{2} \Longrightarrow \#D_{n+1} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

$$\#D_{n+1} = \#D_n + (n-1) = \frac{n(n-3)}{2} + n - 1 = \frac{n(n-3) + 2(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} = \#D_{n+1}$$ ✓

Atención cantidad de términos!

Ej 2. Probar que

$$\sum_{k=1}^{2n}(3k+5) = n(6n+13) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Solución: La suma tiene $2n$ términos:

$$\sum_{k=1}^{2n}(3k+5) = 8+11+14+17+\cdots+(6n+5)$$

queremos ver que la anterior es igual a

$$= n(6n+13) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\textit{Probar} \quad P(n): \quad \sum_{k=1}^{2n}(3k+5) = n(6n+13) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

- $P(1): \quad \sum_{k=1}^{2n=2}(3k+5) = (3\cdot 1+5)+(3\cdot 2+5) = 19 = n(6n+13)$

- $P(2): \quad \sum_{k=1}^{4}(3k+5) = 8+11+14+17 = 50$

  $= 2(6\cdot 2+13) = n(6n+13) \quad \textit{para } n = 2$

- $P(3): \quad \sum_{k=1}^{6}(3k+5) = 8+11+14+17+20+23 = 93$

  $= 3\cdot(6\cdot 3+13) = n(6n+13) \quad \textit{para } n = 3$

$$P(n): \quad \sum_{k=1}^{2n}(3k+5) = n(6n+13) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Demostración por inducción:

- Caso base:
- Paso inductivo:

$$P(n): \quad \sum_{k=1}^{2n}(3k+5) = n(6n+13) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Demostración por inducción:

- Caso base: $P(1)$ es verdadera
- Paso inductivo: $P(h)$ verdadera $\Rightarrow$ $P(h+1)$ verdadera:

$$P(h+1): \quad \sum_{k=1}^{2(h+1)}(3k+5) = (h+1)(6(h+1)+13)$$

Atención a la cantidad de términos en el paso inductivo

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)} a_k = \sum_{k=1}^{2n+2} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} a_k + a_{2n+1} + a_{2n+2}$$

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)}(3k+5) = \sum_{k=1}^{2n+2}(3k+5)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{2n}(3k+5)}_{Hip\ Inductiva} + [3(2n+1)+5] + [3(2n+2)+5]$$

$$= n[6n+13] + (6n+8) + (6n+11)$$

$$= n[6n+13] + 6n + 6n + 19$$

$$= n[6n+6+13] + 6n + 19$$

$$= n[6n+19] + 6n + 19 = (n+1)[\underbrace{6(n+1)+13}_{=6n+19}] \checkmark$$

entonces queda probado $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$

Otra resolución posible: usando el ejercicio 4 que afirma

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2} \implies \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{2n(2n+1)}{2}$$

entonces $P(n)$ se obtiene de la anterior calculando:

$$P(n): \sum_{k=1}^{2n} (3k+5) = 3 \cdot \sum_{k=1}^{2n} k + \sum_{k=1}^{2n} 5$$

$$= 3 \cdot \frac{2n(2n+1)}{2} + 5 \cdot 2n$$

$$= n(6n+3) + 10 \cdot n$$

$$= n(6n+13) \checkmark$$

Ej. 2. Probar que el dígito de las unidades de 6^n es 6 para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, probar que

$$6^n \textit{ es un entero que termina en } 6 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\bullet P(1) : 6^1 & = 6 \\[2ex]
\bullet P(2) : 6^2 & = 36 = 3 \cdot 10 + 6 \\[2ex]
\bullet P(3) : 6^3 & = 216 = 21 \cdot 10 + 6 \\[2ex]
\bullet P(4) : 6^4 & = 1296 = 129 \cdot 10 + 6 \\[2ex]
\bullet P(5) : 6^5 & = 7776 = 777 \cdot 10 + 6 \\[2ex]
\bullet P(6) : 6^6 & = 46\,656 = 4665 \cdot 10 + 6
\end{array}\right\} \Rightarrow \text{la unidad es } 6$$

Paso inductivo:

$$6^n = 10\ell + 6 \Rightarrow 6^{n+1} = 6 \cdot (10\ell + 6) = 6\ell \cdot 10 + 36$$

$$= 6\ell \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 6$$

$$= \underbrace{(6\ell + 3) \cdot 10}_{\text{múltilplo de } 10} + \underbrace{6}_{\text{dígito de las unidades}}$$

$\Rightarrow$ queda probado $P(n)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

Ej. 3. Probar que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$(1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5)+(1^7+2^7+3^7+\cdots+n^7) = 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^4$$

- $P(1):\qquad 1+1=2=2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^4 \ \textit{para}\ n=1$

- $P(2):(1^5+2^5)+(1^7+2^7)=1+32+1+128=162$

$$=2\cdot 3^4 = 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^4 \ \textit{para}\ n=2$$

- $P(3):\qquad (1^5+2^5+3^5)+(1^7+2^7+3^7)$

$$=1+32+243+1+128+2187=2592$$

$$=2\cdot 6^4 = 2\left[\frac{3\cdot 4}{2}\right]^4 = 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^4 \ \textit{para}\ n=3$$

Probar $P(n)$: $\sum_{k=1}^{n} k^5 + \sum_{k=1}^{n} k^7 = 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^4$

Paso inductivo: $P(h)$ verdadera $\Rightarrow P(h+1)$ verdadera

$$\textit{Lado izq} = \sum_{k=1}^{n+1} k^5 + \sum_{k=1}^{n+1} k^7$$

$$= 1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5+(n+1)^5+1^7+2^7+3^7+\cdots+n^7+(n+1)^7$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^5 + (n+1)^5 + \sum_{k=1}^{n} k^7 + (n+1)^7$$

$$\textit{Hip Ind} = 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^4 + (n+1)^5 + (n+1)^7$$

$$= \frac{(n+1)^4}{8} n^4 + (n+1)^5\left[1+(n+1)^2\right]$$

$$= \frac{(n+1)^4}{8} \quad n^4 + (n+1)^5 \left[1 + (n+1)^2\right]$$

$$= \frac{(n+1)^4}{8} \quad \left[n^4 + 8(n+1)\left[1 + (n+1)^2\right]\right]$$

$$= \frac{(n+1)^4}{8} \quad \left[n^4 + 8(n+1) + 8(n+1)(n+1)^2\right]$$

$$= \frac{(n+1)^4}{8} \quad \left[n^4 + 8n + 8 + 8(n+1)(n^2 + 2n + 1)\right]$$

$$= \frac{(n+1)^4}{8} \quad \left[n^4 + 8n^3 + 24n^2 + 32n + 16\right]$$

$$= \frac{(n+1)^4}{8} \quad \left[(n+2)^4\right] = 2\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^4 \checkmark$$

entonces queda probado $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$

DESIGUALDADES

Ej. 4. Probar que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$$

Demostración: Definamos $P(n)$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$

- $P(1)$: $$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = 1 < 2$$
- $P(2)$: $$\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} < 2$$
- $P(3)$: $$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36} < 2$$
- $P(4)$: $$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{205}{144} < 2$$

$$P(n): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$$

Por inducción en n: • $P(1): \quad \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = 1 < 2$

• Paso inductivo: $P(h) \Rightarrow P(h+1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}_{\textit{Hip Inductiva} < 2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$< 2 + \frac{1}{(n+1)^2} \quad \not< 2$$

¿No se llega a probar la desigualdad usando la hipótesis inductiva?

Probar que

$$a) \qquad Q(n): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

$$b) \qquad P(n): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$$

Demostración: Probemos $Q(n)$ por inducción en n.

- *Caso base* : $\quad Q(1): \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = 1 \leq 1 = 2 - \frac{1}{1}$

- Paso inductivo: $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$

$Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{\text{Hip Induc.}}{\leq} \left(2 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\overset{\text{queremos probar}}{\leq} \quad 2 - \frac{1}{n+1}$$

luego, es suficiente probar que

$$-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq -\frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-(n+1)^2 + n}{n(n+1)^2} \leq -\frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad -(n+1)^2 + n \leq -n(n+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad -n^2 - 2n - 1 + n \leq -n^2 - n$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 \leq 0 \qquad \text{lo cual vale } \forall\, n \checkmark$$

$\Longrightarrow Q(n)$ es verdadera $\forall\, n \;\Rightarrow\; \forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$Q(n): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

b) Q(n) verdadera $\forall\, n \Rightarrow$ P(n) es verdadera $\forall\, n$ porque

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} < 2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Ej. 5. Probar

$$a) \quad Q(n): \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \;\forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$b) \quad P(n): \quad \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3n}} \;\forall\, n \in \mathbb{N}$$

Observación en b): plantear el paso inductivo y ver que no sale usando solamente la hip inductiva, porque queda $\dfrac{2n+1}{2(n+1)} < \dfrac{\sqrt{3n}}{\sqrt{3(n+1)}}$ que no vale

Solución:

$$Q(n): \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

- $Q(1): \prod_{k=1}^{1} \frac{2k-1}{2k} \quad = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{4}}$

- $Q(2): \prod_{k=1}^{2} \frac{2k-1}{2k} \quad = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \leq \frac{1}{\sqrt{7}}$ pues $7 < \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{9}$

- $Q(3): \prod_{k=1}^{3} \frac{2k-1}{2k} \quad = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{16} \leq \frac{1}{\sqrt{10}}$ pues $10 < \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{256}{25}$

- $Q(4): \prod_{k=1}^{4} \frac{2k-1}{2k} \quad = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} = \frac{35}{128} \leq \frac{1}{\sqrt{13}}$ pues $13 < \left(\frac{128}{35}\right)^2$

$$= 13.37\ldots$$

Paso inductivo:

$$Q(n) \Longrightarrow Q(n+1): \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$$

$$\textit{Lado izq}: \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}\right) \cdot \left(\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}\right)$$

$$\textit{Hip Ind} \ \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)$$

$$\textit{queremos ver} \ \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{3n+4}{3n+1}} \leq \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) \Leftrightarrow \frac{3n+4}{3n+1} \leq \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \frac{3n+4}{3n+1} &\le \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 \\
\Leftrightarrow 1 + \frac{3}{3n+1} &\le \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^2 \\
\Leftrightarrow 1 + \frac{3}{3n+1} &\le \left(1 + \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)^2}\right) \\
\Leftrightarrow \frac{3}{3n+1} &\le \left(\frac{2}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{2(2n+1)+1}{(2n+1)^2} \\
\Leftrightarrow 3(2n+1)^2 &\le (3n+1)(4n+3) \\
\Leftrightarrow 3 \cdot (4n^2 + 4n + 1) &\le 3 \cdot (4n^2 + 3n + \tfrac{4}{3}n + 1) \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Atención:

- En todas las desigualdades anteriores los factores son positivos, luego al multiplicar se mantienen las $<$

- Los enunciados anteriores son todos equivalentes: valen los $\Longleftrightarrow$

$\Rightarrow$ Queda probado Q(n) es verdadera $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow Q(n): \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} < \frac{1}{\sqrt{3n}} \ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ Queda probado P(n) es verdadera $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $\checkmark$

Inducción corrida

Inducción corrida

¿Es verdad que

$$5^n > n^5 \quad \forall\, n?$$

Inducción corrida

Ej. 6. Hallar n_0 tal que

$$5^n > n^5 \quad \forall\, n \geq n_0$$

y probar la afirmación por inducción.

- P(1): $5 = 5^1 > n^5 = 1 \quad \Rightarrow$ P(1) es verdadera
- P(2): $25 = 5^2 \not> 2^5 = 32 \quad \Rightarrow$ ¡P(2) es falsa!
- P(3): $125 = 5^3 \not> 3^5 = 243 \quad \Rightarrow$ ¡P(3) es falsa!
- P(4): $625 = 5^4 \not> 4^5 = 1024 \quad \Rightarrow$ ¡P(4) es falsa!
- P(5): $5^5 \not> 5^5 \quad \Rightarrow$ ¡P(5) es falsa!
- P(6): $15\,625 = 5^6 > 6^5 = 7776 \quad \Rightarrow$ P(6) es verdadera

Sea $n \geq 6$ entonces $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$5^{n+1} = 5 \cdot \overbrace{5^n > n^5}^{\textit{Hip inductiva}} \cdot 5$$

$$= n^5 + n^5 + n^5 + n^5 + n^5$$

$$> n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 = (n+1)^5$$

lo cual vale pues

- $n \geq 6 > 5 \Rightarrow \; n > 5 \Rightarrow \; n \cdot n^4 > 5 \cdot n^4 \Rightarrow \; n^5 > 5n^4$
- $n \geq 6 > 5 \Rightarrow \; n^2 > 25 \Rightarrow \; n^2 > 10 \Rightarrow \; n^5 \geq 10n^3$
- $n \geq 6 > 5 \Rightarrow \; n^3 > 10 \Rightarrow \; n^5 \geq 10n^2$

C.A: $n^5 > 5n + 1 \ \forall \ n \geq 6$ porque

$$\begin{aligned} n^5 = n^4 \cdot n > 2^4 \cdot n = 16n \\ > 6n = 5n + n \\ > 5n + 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Queda probado P(n) es verdadera $\forall \ n \geq 6, \ n \in \mathbb{N}$ ✓