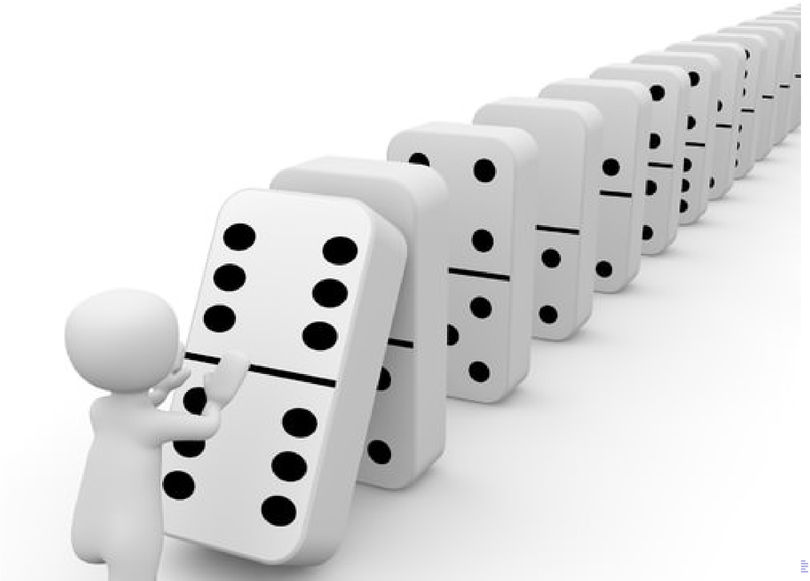
Álgebra 1

Práctica 2: Inducción global

Patricia Jancsa

Viernes 16/4/2021

Inducción: Efecto dominó



Inducción global - Combinatoria

Inducción

$$1 \qquad\qquad\qquad\qquad n \Longrightarrow n+1$$

$$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet$$

Inducción global: necesitamos $P(1), \ P(2), \ldots, \ P(n)$ verdaderas para probar $P(n+1)$ verdadera

$$1, 2, \ldots, n \Longrightarrow n+1$$

$$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet$$

Inducción global

Ej 1. Probar que todo $n \in \mathbb{N}$ es puede escribir como sumas y restas de potencias de 3, todas distintas.

Solución:
- $P(1) : 1 = 3^0$
- $P(2) : 2 = -1 + 3 = -3^0 + 3^1$
- $P(3) : 3 = 3^1$
- $P(4) : 4 = 1 + 3 = 3^0 + 3^1$
- $P(5) : 5 = 9 - 3 - 1 = 3^2 - 3^1 - 3^0$
- $P(6) : 6 = 9 - 3 = 3^2 - 3^1$
- $P(7) : 7 = 9 - 3 + 1 = 3^2 - 3^1 + 3^0$
- $P(8) : 8 = 9 - 1 = 3^2 - 3^0, \ etc$

$\Rightarrow$ necesitamos $P(1),\ P(2), \ldots,\ P(n-1)$ verdaderas para probar $P(n)$ verdadera
$\Rightarrow$ Inducción global

- Casos base: $n = 1, 2$
- Supongamos $P(k)$ verdadera $\forall\ 1 \leq k \leq n-1$ y probemos $P(n)\ \forall\ n \geq 3$:

Formalmente, el signo se puede escribir como $\epsilon(j) = \pm 1$ para cada k

$$P(n) : n = \sum_{j=1}^{N} \epsilon(j) 3^{\ell_j}$$

$$P(n) : n = \sum_{j=1}^{N} \pm 3^{\ell_j} : \quad 0 \leq \ell_1 < \ell_2 < \ldots \ell_N$$

$\forall$ n vale alguna de las 3 posibilidades:

- $n = 3 \cdot k$
- $n = 3 \cdot k + 1$
- $n = 3 \cdot k + 2$, $k \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow$ $0, 1$ y 2 son los posibles restos en la división por 3:

- $1 = 3 \cdot 0 + 1$
- $2 = 3 \cdot 0 + 2$
- $3 = 3 \cdot 1 + 0$
- $4 = 3 \cdot 1 + 1$
- $5 = 3 \cdot 1 + 2$
- $6 = 3 \cdot 2 + 0$

$$\cdots$$

- $10^5 = 99.999 + 1 = 3 \cdot 33.333 + 1$, etc

- Casos base: $n = 1, 2, 3$
- Hipótesis inductiva:

$$P(k) \text{ verdadera } \forall\ 1 \leq k < n \Rightarrow P(n)\ \forall\ n \geq 3$$

- Si $n = 3h$

$$\Longrightarrow 1 \leq h < n \Longrightarrow \text{ vale la hipótesis inductiva para } h$$

$$\Longrightarrow h = \sum_{j=1}^{N} \pm 3^{\ell_j} : 0 \leq \ell_1 < \ell_2 < \ldots \ell_N$$

$$\Longrightarrow n = 3h = \sum_{j=1}^{N} \pm 3^{\ell_j + 1} : 1 \leq \ell_1 + 1 < \ell_2 + 1 < \ldots \ell_N + 1$$

• Si $n = 3h + 1$

$$\Longrightarrow 1 \leq h < n \Longrightarrow \text{ vale la hipótesis inductiva para } h$$

$$\Longrightarrow h = \sum_{j=1}^{N} \pm 3^{\ell_j} : 0 \leq \ell_1 < \ell_2 < \ldots \ell_N$$

$$\Longrightarrow n = 3h + 1 = 3^0 + \sum_{j=1}^{N} \pm 3^{\ell_j + 1} : 0 \leq \ell_1 < \ell_2 < \ldots \ell_N$$

donde el 3^0 no aparece entre las potencias de la sumatoria, dado que todas son ≥ 1, o sea

$$0 \leq \ell_1 < \ell_2 < \ldots \ell_N \Longrightarrow 1 \leq \ell_1 + 1 < \ell_2 + 1 < \ldots \ell_N + 1$$

- Si $n = 3h+2$, escribamos $2 = 3 - 1 = 3^1 - 3^0$

$$\Longrightarrow n = 3h+3 - 3^0$$

$$= 3 \cdot \underbrace{(h+1)}_{=\tilde{h}} - 3^0 = 3\tilde{h} - 3^0 \textit{ donde } \tilde{h} := h+1 < n$$

$$\Longrightarrow \text{ vale la hipótesis inductiva para } \tilde{h} < n$$

$$\Longrightarrow \tilde{h} = \sum_{j=1}^{N} \pm 3^{\ell_j} : 0 \leq \ell_1 < \ell_2 < \ldots \ell_N$$

$$\Longrightarrow n = 3\tilde{h} - 3^0$$

$$= -3^0 + \sum_{j=1}^{N} \pm 3^{\ell_j+1} : 1 \leq \ell_1 + 1 < \ell_2 + 1 < \ldots \ell_N + 1$$

donde el 3^0 no aparece entre las potencias de la sumatoria, dado que todas son ≥ 1 ✓

$$0 \leq \ell_1 < \ell_2 < \ldots \ell_N \Longrightarrow 1 \leq \ell_1 + 1 < \ell_2 + 1 < \ldots \ell_N + 1$$ ✓

Ejemplo 2

$$Sea \quad f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, \quad f(n)=\begin{cases} \dfrac{n}{2} & si\ n\ es\ par \\ n+3 & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que la aplicación reiterada j veces de f a n da 1 ó 3.

¿Necesitamos inducción global?

- $P(1) : f(1) = 1+3 = 4 \Rightarrow f(f(1)) = f(4) = 2$

$$\Rightarrow f(f(f(1))) = f(2) = 1 \Rightarrow j = 3$$

- $P(2) : f(2) = \dfrac{2}{2} = 1 \Rightarrow j = 1$
- $P(3) : f(3) = 3+3 = 6 \Rightarrow f(f(3)) = f(6) = \dfrac{6}{2} = 3 \Rightarrow j = 2$

- $P(4) : f(4) = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow f(f(4)) = f(2) = 1 \Rightarrow j = 2$

- $P(5) : f(5) = 5 + 3 = 8 \Rightarrow f(f(5)) = f(8) = \frac{8}{2} = 4$

$$\Rightarrow \ \textit{usando } f^{(2)}(4) = 2 \Rightarrow \ f^{(4)}(5) = 1 \Rightarrow j = 4$$

- $P(10) : f(10) = \frac{10}{2} = 5$

$$\Rightarrow \ \textit{usando } f^{(4)}(5) = 1 \Rightarrow \ f^{(5)}(10) = 1 \Rightarrow j = 5$$

$$f : 10 \mapsto 5 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$$

- $P(20) : f(20) = 10$

$$\Rightarrow \ \textit{usando } f^{(5)}(10) = 1 \Rightarrow \ f^{(6)}(20) = 1 \Rightarrow j = 6$$

$$f : 20 \mapsto 10 \mapsto 5 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$$

- $P(27) : 27 \mapsto 30 \mapsto 15 \mapsto 18 \mapsto 9 \mapsto 12 \mapsto 6 \mapsto 3$

$$\Rightarrow \ f^{(7)}(27) = 3 \Rightarrow \ j = 7$$

- $P(160) : 160 \mapsto 80 \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto 5 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$

$$\Rightarrow \ f^{(9)}(160) = 1 \Rightarrow j = 9$$

$\Rightarrow$ necesitamos $P(1),\ P(2),\ldots,\ P(n)$ verdaderas para probar $P(n)$ verdadera
$\Rightarrow$ Inducción global

- Caso base: $n = 1$
- Supongamos $P(k)$ verdadera $\forall\ 1 \leq k < n$ y probemos $P(n)$:

Si n es par $\Rightarrow f(n) = \dfrac{n}{2} < n$
$\Rightarrow$ entonces estamos en las condiciones de la hipótesis inductiva para $\dfrac{n}{2}$

$$\Rightarrow \ \textit{existe un } j \in \mathbb{N} \textit{ tal que } \ f^{(j)}\left(\frac{n}{2}\right) = 1 \text{ ó } 3$$

$$\Rightarrow \ f^{(j+1)}(n) = f^{j}(f(n)) = f^{(j)}\left(\frac{n}{2}\right) = 1 \text{ ó } 3$$

Si n es impar, escribamos $n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow\ f(n) = n + 3 = 2k + 4 = 2(k + 2) \text{ es par}$$

$$\Rightarrow\ f(f(n)) = f(2(k + 2)) = k + 2$$

Si $k + 2 < n$, podemos usar la hipótesis inductiva

$\Rightarrow$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(j)}(k + 2) = 1$ ó 3

$$\Rightarrow f^{(j+2)}(n) = 1 \text{ ó } 3$$

Probemos que $k + 2 < n$:

$$k + 2 < n = 2k + 1 \iff 1 < k \iff 3 < 2k + 1 = n$$

$\Longrightarrow$ hay que probar por separado $P(1)$ y $P(3)$

que ya lo hicimos

$\Longrightarrow$ queda probado $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$ ✓

Práctica 3

Combinatoria

Estrategias para contar

Combinatoria

Ejemplo 1. En oficinas distintas trabajan de forma presencial las personas A, B y C. Sabemos que A y B tienen 6 contactos estrechos en común y B y C tienen 4 contactos estrechos en común, distintos de los anteriores. Se informa que A se contagió de covid. ¿De cuántas formas distintas se puede llegar a contagiar C a partir de A vía contactos estrechos?

- B puede contagiarse de A de 6 formas distintas

por cada una de ellas

- C puede contagiarse de B de 4 formas distintas

$\Longrightarrow$ #posibilidades de contagio de C a partir de A

$$= 6 \cdot 4 = 24$$

Ej 2. ¿Cuántos $1 \leq n \leq 2000$, $n \in \mathbb{N}$ no son múltiplos de 4 ni de 5?

Solución:

$$\Longrightarrow n \in \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 17, 18, 19,$$

$$21, 22, 23, 26, 27, 29, 31, 33, 34, 37, 38, 39$$

$$41, 42, 43, 46, 47, 49, 51, 53, 54, 57, 58, 59 \cdots, 1999\}$$

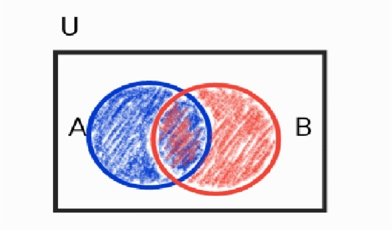
- Entre 1 y 20 hay 12 que no son múltiplos de 4 ni de 5
- Entre 21 y 40 hay 12 más no múltiplos de 4 ni de 5
- Entre 41 y 60 hay 12 más no múltiplos de 4 ni de 5...

$$\Longrightarrow \text{ cada 20 hay 12 valores de } n \text{ posibles}$$

$$2000 = 20 \cdot 100 \Longrightarrow \textit{Total} = 12 \cdot 100 = 1200$$

Otra solución: Principio de inclusión y exclusión:

$\#(A \cup B) = (\#A) + (\#B) - \#(A \cap B)$



Sean $A := \{n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 2000 :$ n es múltiplo de 4 $\}$

$B := \{n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 2000 :$ n es múltiplo de 5 $\}$

entonces

$$\#A = \frac{2000}{4} = 500$$

$$\#B = \frac{2000}{5} = 400$$

La unión y la intersección son los conjuntos

$$A \cup B = \{n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 2000 : \text{ n es múltiplo de 4 ó de 5 }\}$$

$$A \cap B = \{n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 2000 : \text{ n es múltiplo de 4 y de 5 }\}$$

$$= \{n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 2000 : \text{ n es múltiplo de 20 }\}$$

$$\Longrightarrow \#(A \cap B) = \frac{2000}{20} = 100$$

Inclusión - exclusión implica

$$\Longrightarrow \#(A \cup B) = (\#A) + (\#B) - \#(A \cap B)$$

$$= 500 + 400 - 100 = 800$$

Por lo tanto,

$$\#\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 2000, \text{ n \textbf{no} es múltiplo de 4 ni de 5 }\}$$

$$= \#(A \cup B)^c = 2000 - 800 = 1200 \checkmark$$

Principio de inclusión y exclusión

Ej 3. En una encuesta sobre preferencias de helados se recogieron los siguientes datos:

- A 78 estudiantes les gusta el chocolate.
- A 32 estudiantes les gusta el de dulce de leche.
- A 57 estudiantes les gusta el de frambuesa.
- A 13 estudiantes les gusta tanto el de chocolate como el de dulce de leche.
- A 16 estudiantes les gusta tanto el de chocolate como el de frambuesa.
- A 21 estudiantes les gusta tanto el de dulce de leche como el de frambuesa.
- A 5 estudiantes les gustan los 3 sabores
- A 14 estudiantes no les gusta ninguno de los 3.

Determinar el número total de encuestados.

Renombremos...

Los datos sobre las preferencias de helados son:

- $\#C = \#\{$ chocolate$\} = 78$
- $\#D = \#\{$ dulce de leche$\} = 32$
- $\#F = \#\{$ frambuesa $\} = 57$

- $\#(C \cap D) = \#\{$ chocolate y dulce de leche $\} = 13$
- $\#(C \cap F) = \#\{$ chocolate y frambuesa $\} = 16$
- $\#(D \cap F) = \#\{$ dulce de leche y frambuesa $\} = 21$

- $\#(C \cap D \cap F) =$

$\#\{$ chocolate, dulce de leche y frambuesa $\} = 5$

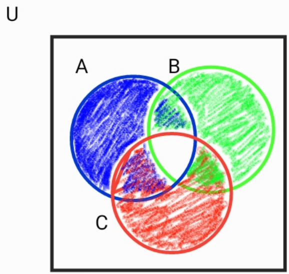
- $\#\mathcal{U} - (C \cup D \cup F) = \#\{$ ninguno $\} = 14$

$\Longrightarrow$ número total de encuestados

$$= \#\mathcal{U} = \#(C \cup D \cup F) + \#(C \cup D \cup F)^c$$

Solución: Principio de inclusión y exclusión:

$$\#(A \cup B) = (\#A) + (\#B) - \#(A \cap B)$$



$$\#(C \cup D \cup F) = (\#C) + (\#D) + (\#F)$$

$$-\#(C \cap D) - \#(C \cap F) - \#(D \cap F)$$

$$+\#(C \cap D \cap F)$$

¿Los encuestados cuántos son?

$$\#(C \cup D \cup F) = (\#C) + (\#D) + (\#F)$$

$$-\#(C \cap D) - \#(C \cap F) - \#(D \cap F)$$

$$+\#(C \cap D \cap F)$$

$$= 78 + 32 + 57 - 13 - 16 - 21 + 5$$

$$= 122$$

Por lo tanto, la cantidad total de encuestados es

$$\#\mathcal{U} = \#(C \cup D \cup F) + \#(C \cup D \cup F)^c$$

$$= 122 + 14 = 136 \checkmark$$

Claves de 4 dígitos

Ej 4. Se tienen 20 consonantes y 5 vocales para conformar claves de acceso de 4 letras.

a) ¿Cuántas hay en total?

b) ¿Cuántas hay si los caracteres elegidos deben ser todos distintos?

c) Cuántas hay con la condición de que tengan al menos una letra repetida

d) Cuántas hay con la condición de que no tengan dos consonantes seguidas?

a) Se tienen 20 consonantes y 5 vocales para conformar claves de acceso de 4 letras. ¿Cuántas hay en total?

Solución: Definamos el conjunto cuyos elementos queremos contar:

$$\mathcal{T} = \{\text{palabras de 4 letras}\}$$

$$\boxed{\_ \cdot \_ \cdot \_ \cdot \_}$$

a) Se tienen 20 consonantes y 5 vocales para conformar claves de acceso de 4 letras. ¿Cuántas hay en total?

Solución: Definamos el conjunto cuyos elementos queremos contar

$$\mathcal{T} = \{\text{palabras de 4 letras}\}$$

$$\boxed{\underline{25} \cdot \underline{25} \cdot \underline{25} \cdot \underline{25}}$$

Elecciones independientes

- tenemos 25 elecciones posibles para la primera letra,

por cada una de ellas

- 25 elecciones posibles para la 2da letra,

por cada una de las anteriores

- 25 elecciones posibles para la 3ra letra,

por cada una de las anteriores

- 25 elecciones posibles para la 4ta letra

$$\Longrightarrow N = \#\mathcal{T} = 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 = 25^4 = 390.625$$

Letras distintas

Se tienen 20 consonantes y 5 vocales para conformar claves de acceso de 4 letras.

b) ¿Cuántas hay si los caracteres elegidos deben ser todos distintos?

Solución: Definamos el conjunto cuyos elementos queremos contar:

$$\mathcal{D} = \{\text{palabras de 4 letras todas distintas}\} \subsetneq \mathcal{T}$$

$$\Longrightarrow \#\mathcal{D} < \#\mathcal{T}$$

El $<$ es porque los conjuntos son finitos

• tenemos 25 elecciones posibles para la primera letra,

por cada una de ellas

•24 elecciones distintas de la anterior para la 2da letra,

por cada una de ellas

•23 elecciones distintas de las 2 anteriores para la 3ra letra,

por cada una de ellas

•22 elecciones distintas de las 3 anteriores para la 4ta letra,

$$\Longrightarrow N = \#\mathcal{D} = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303.600$$

Complemento

Se tienen 20 consonantes y 5 vocales para conformar claves de acceso de 4 letras.

c) Cuántas hay en con la condición de que tengan al menos una letra repetida

Solución:

$$\mathcal{T} = \mathcal{D} \cup \mathcal{D}^c = \mathcal{D} \cup \mathcal{R}$$

$\mathcal{R}$ es el complemento del anterior y la unión es disjunta

$$\Rightarrow \#\mathcal{T} = (\#\mathcal{D}) + (\#\mathcal{R})$$

entonces $\#\mathcal{R} = (\#\mathcal{T}) - (\#\mathcal{D})$

$$\Rightarrow \#\mathcal{R} = \textit{Total} - \#\{\text{claves con todas las letras distintas}\}$$

$$= 25^4 - 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 87.025$$

Unión disjunta

¿Cuántas hay en con la condición de que no tengan dos ó más consonantes seguidas?

Solución: Llamemos

$\mathcal{C} :=$ {palabras que no tienen 2 ó más consonantes seguidas}

y dentro de éste

$$\mathcal{C}_0 = \{\textit{palabras con ninguna consonante}\}$$

$$\mathcal{C}_1 = \{\textit{palabras con exactamente } 1 \textit{ consonante}\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{\textit{palabras con exactamente } 2 \textit{ consonantes } (\textit{no seguidas})\}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{C} = \underbrace{\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2}_{\text{unión disjunta}}$$

$$\Longrightarrow \#\mathcal{C} = \#\mathcal{C}_0 + \#\mathcal{C}_1 + \#\mathcal{C}_2$$

Cardinal de cada uno de los tres subconjuntos

$$\begin{aligned}\#\mathcal{C}_0 &= \#\{\textit{palabras con ninguna consonante}\}\\ &= \#\{\textit{palabras con } 4 \textit{ vocales}\}\end{aligned}$$

$$\textit{cada clave} = \boxed{\ \underline{V} \cdot \underline{V} \cdot \underline{V} \cdot \underline{V}}$$

entonces las posibilidades son

$$\boxed{\underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5}}$$

entonces la cantidad de claves distintas sin consonantes (con 4 vocales) es

$$\Longrightarrow \#\mathcal{C}_0 = 5^4$$

$$\#\mathcal{C}_1 = \{\textit{palabras con exactamente } 1 \textit{ consonante}\}$$

$$= \#\{\textit{palabras con exactamente } 1 \textit{ consonante y } 3 \textit{ vocales}\}$$

¿Cuántas hay?

$$\textit{cada clave} = \boxed{\ \underline{C} \cdot \underline{V} \cdot \underline{V} \cdot \underline{V}\ }$$

entonces la cantidad de claves distintas que empiezan con una consonante son

$$\boxed{\underline{20} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5}}$$

La misma cantidad con la consonante ubicada en cualquiera de los otros 3 lugares, entonces la cantidad total de claves distintas de esta forma es

$$\Longrightarrow \#\mathcal{C}_1 = 4 \cdot 20 \cdot 5^3$$

$\#\mathcal{C}_2$

$= \#\{\textit{palabras con exactamente } 2 \textit{ consonantes } (\textit{no seguidas})\}$

$= \#\{\textit{palabras con } 2 \textit{ consonantes alternadas con } 2 \textit{ vocales}\}$

¿Cuántas hay? Estas claves pueden ser de 3 tipos:

$$\boxed{\underline{C} \cdot \underline{V} \cdot \underline{C} \cdot \underline{V}} \Longrightarrow 20^2 \cdot 5^2$$

ó bien

$$\boxed{\underline{V} \cdot \underline{C} \cdot \underline{V} \cdot \underline{C}} \Longrightarrow 20^2 \cdot 5^2$$

ó bien

$$\boxed{\underline{C} \cdot \underline{V} \cdot \underline{V} \cdot \underline{C}} \Longrightarrow 20^2 \cdot 5^2$$

entonces la cantidad de claves distintas en este caso es

$$\Longrightarrow \#\mathcal{C}_2 = 3 \cdot 20^2 \cdot 5^2$$

Cantidad total de palabras con consonantes no seguidas

= suma de los cardinales de los 3 conjuntos disjuntos

$$\Longrightarrow \#\mathcal{C} = \#\mathcal{C}_0 + \#\mathcal{C}_1 + \#\mathcal{C}_2$$

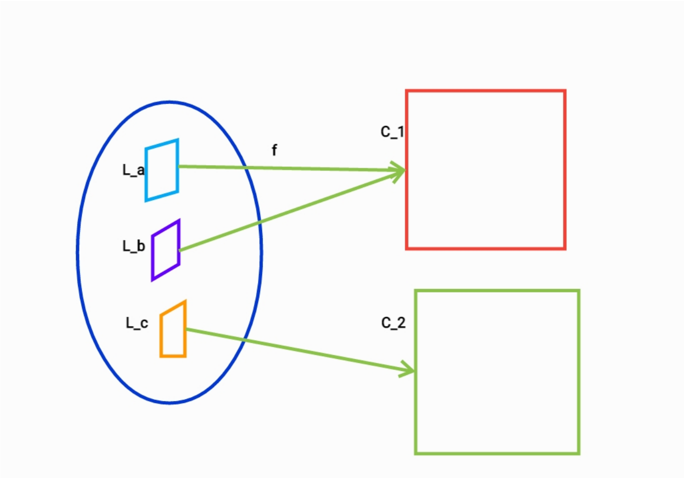
$$= 5^4 + 4 \cdot 20 \cdot 5^3 + 3 \cdot 20^2 \cdot 5^2$$

$$= 625 + 10.000 + 30.000 = 40.625$$

Cardinal de Funciones entre conjuntos finitos

Ej 5. ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar 3 libros distintos en 2 cajas enumeradas?

$$\#\{\text{Funciones } f : \{\textit{libros}\} \to \{\textit{cajas}\}\}$$



Cardinal de Funciones entre conjuntos finitos

- el libro a puede ir a cualquiera de las 2 cajas

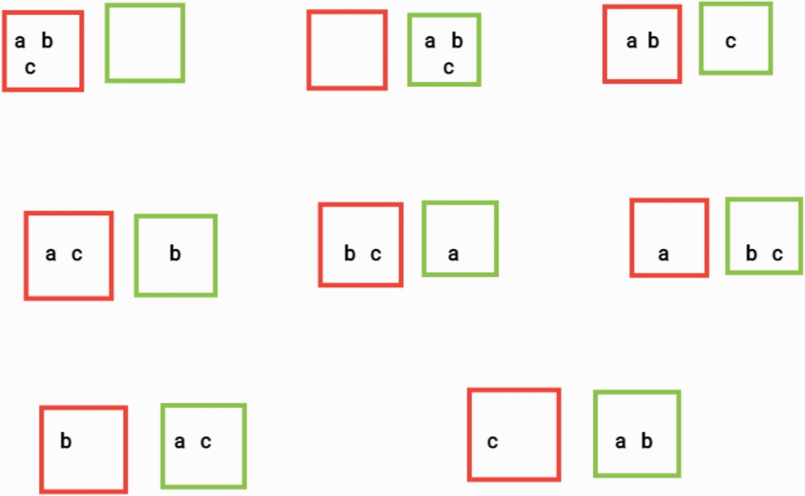
independientemente, por cada una de estas elecciones

- el libro b puede ir a cualquiera de las 2 cajas

independientemente, por cada una de estas elecciones

- el libro c puede ir a cualquiera de las 2 cajas

3 libros distintos a, b y c en cajas 1 y 2



Cardinal de Funciones entre conjuntos finitos

$\Longrightarrow$ hay $= 2^3$ formas distintas de acomodar

3 libros distintos en 2 cajas

(sin importar el orden dentro de cada caja)

$\#\{\text{Funciones: libros} \to \text{cajas}\} = (\#\textit{cajas})^{\#\textit{libros}}$

Cardinal de Funciones

Si A, B son conjuntos finitos con $\#A = a, \ \#B = b$ entonces

$$\#\{\text{Funciones } f : A \to B\} = b^a$$

hay b^a formas distintas de acomodar
a libros distintos en b cajas

(sin importar el orden dentro de cada caja)

$$\#\{\text{Funciones: libros} \to \text{cajas}\} = (\#cajas)^{\#libros}$$

Cardinal de Funciones

Ej 6. ¿De cuántas formas distintas se pueden asignar 10.000 pasajeros en 15 aviones distintos?

Sean $A = \{pasajeros\}$, $B = \{aviones\}$ son conjuntos finitos con $\#A = 10^4,\ \#B = 15$ entonces

$$\#\{\text{Funciones } f : A \to B\} = b^a = 15^{10^4}$$

hay 15^{10^4} formas distintas de asignar

10^4 personas (son todas distintas) en 15 aviones