Álgebra 1

Práctica 1: Continuación

Patricia Jancsa

Conectores Lógicos

Dado $U =$ conjunto referencial, se establece una correspondencia entre

$$\{\textit{subconjuntos } A \subseteq U\} \leftrightarrow \{\textit{enunciados para elementos de } U\}$$

bajo la cual se traducen

$$\{\textit{Operaciones de conjuntos }\} \leftrightarrow \{\textit{conectores logicos}\}$$

• *complemento*	$\sim$	*no*
• *intersección*	$\wedge$	y
• *unión*	$\vee$	ó inclusivo
• *diferencia simétrica*	$\underline{\vee}$	ó excluyente

Definamos el enunciado asociado al conjunto A:

$P : x \in A$ $\qquad\qquad$ $\sim P : x \notin A$

- $P(x)$ es verdadera si y sólo si el elemento $x \in A$
- $\sim P(x)$ es verdadera si y sólo si el elemento $x \in A^c$

la tabla de verdad :

P	$\sim P$
V	F
F	V

Las tablas de verdad de las operaciones de conjuntos se corresponden con las tablas de verdad de los conectores lógicos:

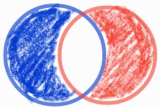
P es verdadera si y sólo si $x \in A$, Q es verdadera si y sólo si $x \in B$, entonces

- $A^c \Leftrightarrow \sim P$
- $A \cup B \Leftrightarrow P \vee Q$
- $A \cap B \Leftrightarrow P \wedge Q$
- $A \triangle B \Leftrightarrow P \veebar Q$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow P \Rightarrow Q$
- $A = B \Leftrightarrow P \Longleftrightarrow Q$

P es verdadera si y sólo si $x \in A$,
Q es verdadera si y sólo si $x \in B$, entonces

$x \in A \cup B \Leftrightarrow P \vee Q$ es verdadera

$x \in A \cap B \Leftrightarrow P$ y Q verdaderas
$\Leftrightarrow P \wedge Q$ es verdadera



- $A \triangle B \Leftrightarrow P \underline{\vee} Q$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow P \Rightarrow Q$

Es decir que

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow$$

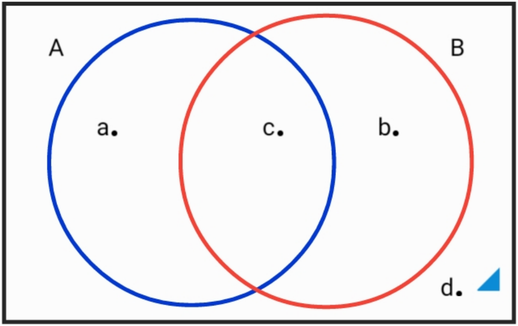
$$P \textit{ es verdadera y } Q \textit{ es falsa}$$

$$\text{ó bien } Q \textit{ es verdadera y } P \textit{ es falsa}$$

Ej. 1. a) Construir la tabla de verdad de $A \subseteq B$.

b) Probar que dado un conjunto referencial U y conjuntos $A, B \subseteq U$ vale

$$A^c \cup B = U \Rightarrow A \subseteq B$$

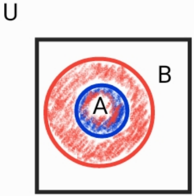


Empecemos con las 4 posibilidades para cada $x \in U$ en relación a A, B

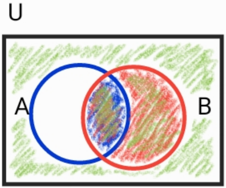
A	B	$A \subseteq B$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Completemos la tabla de verdad de la inclusión:

A	B	$A \subseteq B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V



$A \subseteq B$



$A^c \cup B \subsetneq U$

b) Comprobación: Completemos la tabla de verdad

A	B	A^c	$A^c \cup B$	$A \subseteq B$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Completemos la columna de A^c:

A	B	A^c	$A^c \cup B$	$A \subseteq B$
V	V	F		
V	F	F		
F	V	V		
F	F	V		

Completemos la 4ta columna:

A	B	A^c	$A^c \cup B$	$A \subseteq B$
V	V	F	V	
V	F	F	F	
F	V	V	V	
F	F	V	V	

la cual es V salvo en el caso en que A^c y B son ambos falsos

Completemos finalmente la tabla en la columna de $A \subseteq B$ usando la tabla de verdad de la inclusión:

A	B	A^c	$A^c \cup B$	$A \subseteq B$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Pero atención: ¿qué significa la hipótesis?

$$A^c \cup B = U$$

Significa que todo $x \in U$ cumple al menos una de las dos:

$$x \in A^c \vee x \in B$$

$\Longrightarrow$ no pueden ser A^c y B ambas falsas

$\Longrightarrow$ el caso 2 (fila roja) no ocurre nunca

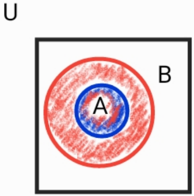
A	B	A^c	$A^c \cup B$	$A \subseteq B$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Concluímos que la propiedad vale pues la fila roja no verifica la hipótesis y en los otros casos la columna azul es siempre verdadera

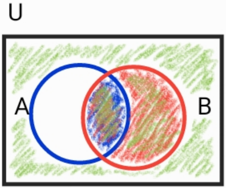
Notar que en realidad

$$A^c \cup B = U \Longleftrightarrow A \subseteq B$$

pues tienen la misma tabla de verdad



$A \subseteq B$



$A^c \cup B \subsetneq U$

Ej. 2. Probar que para todo $A, B, C \subseteq U$, se verifica

$$(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C) = (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$$

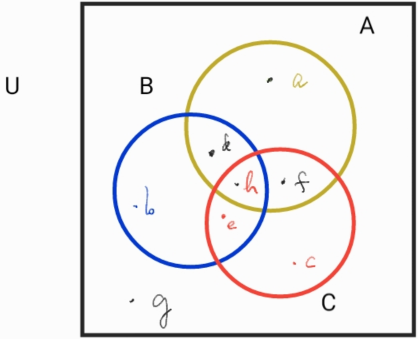
Solución: • Recordemos que las operaciones $\cup$ y $\cap$ son binarias (se aplican a dos conjuntos) pero son asociativas:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$$

• Resolvemos con tablas de verdad y la propiedad
$W - V = W \cap V^c$,
o sea que se quiere probar

$$(A \cup B \cup C) \cap (A \cap B \cap C)^c = (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$$



2^3 posibilidades para $x \in U$:

Cada $x \in U$ puede pertenecer o no

a cada uno de los 3 conjuntos

Lado izquierdo: Empecemos completando las $2^3 = 8$ posibilidades para un $x \in U$ en relación a 3 conjuntos:

A	B	C	$A \cup B \cup C$	$A \cap B \cap C$	$(A \cap B \cap C)^c$	$(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

Completemos las columnas de unión e intersección:

A	B	C	$A \cup B \cup C$	$A \cap B \cap C$	$(A \cap B \cap C)^c$	$(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$
V	V	V	V	V		
V	V	F	V	F		
V	F	V	V	F		
V	F	F	V	F		
F	V	V	V	F		
F	V	F	V	F		
F	F	V	V	F		
F	F	F	F	F		

Miembro izquierdo de la igualdad: completemos la columna de $(A \cap B \cap C)^c$

A	B	C	$A \cup B \cup C$	$A \cap B \cap C$	$(A \cap B \cap C)^c$	$(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C$
V	V	V	V	V	F	
V	V	F	V	F	V	
V	F	V	V	F	V	
V	F	F	V	F	V	
F	V	V	V	F	V	
F	V	F	V	F	V	
F	F	V	V	F	V	
F	F	F	F	F	V	

La última columna es la intersección de la azul y la roja

A	B	C	$A \cup B \cup C$	$A \cap B \cap C$	$(A \cap B \cap C)^c$	$(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C$
V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	V	F

Miembro derecho: empecemos con las 2^3 posibilidades:

A	B	C	$A \triangle B$	$A \triangle C$	$(A \triangle B) \cup (A \triangle C)$	
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

Completemos $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

$$= (A \cup B) - (A \cap B)$$

A	B	C	$A \triangle B$	$A \triangle C$	$(A \triangle B) \cup (A \triangle C)$
V	V	V	F		
V	V	F	F		
V	F	V	V		
V	F	F	V		
F	V	V	V		
F	V	F	V		
F	F	V	F		
F	F	F	F		

Completemos la columna

$$A \triangle C = (A - C) \cup (C - A)$$

A	B	C	$A \triangle B$	$A \triangle C$	$(A \triangle B) \cup (A \triangle C)$
V	V	V	F	F	
V	V	F	F	V	
V	F	V	V	F	
V	F	F	V	V	
F	V	V	V	V	
F	V	F	V	F	
F	F	V	F	V	
F	F	F	F	F	

La última columna del lado derecho es la unión de la azul y la roja

A	B	C	$A \triangle B$	$A \triangle C$	$(A \triangle B) \cup (A \triangle C)$
V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F

Comparemos finalmente el lado izquierdo con el derecho:

los conjuntos son iguales porque sus tablas de verdad coinciden

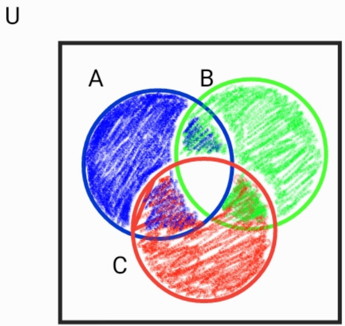
A	B	C	$A \cup B \cup C$	$A \cap B \cap C$	$(A \cap B \cap C)^c$	$(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$
V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	V	F

A	B	C	$A \triangle B$	$A \triangle C$	$(A \triangle B) \cup (A \triangle C)$
V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F

$\Rightarrow$ los conjuntos son iguales

$$\Rightarrow (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C) = (A \vartriangle B) \cup (A \vartriangle C)$$

$$(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C) = (A \vartriangle B) \cup (A \vartriangle C)$$



Ej. 3. Decidir si el siguiente enunciado es verdadero o falso:

$$A - (B - C) = (A - B) - C$$

Representar en un diagrama de Venn el resultado en cada caso.

Solución: Comparemos los valores de verdad de uno y otro conjuntos en una tabla.

Calculemos las tablas de verdad:

A	B	C	$A - B$	$B - C$	$A - (B - C)$	$(A - B) - C$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

Completemos la columna de $A - B = A \cap B^c$:

A	B	C	$A - B$	$B - C$	$A - (B - C)$	$(A - B) - C$
V	V	V	F			
V	V	F	F			
V	F	V	V			
V	F	F	V			
F	V	V	F			
F	V	F	F			
F	F	V	F			
F	F	F	F			

Completemos la columna de $B - C = B \cap C^c$:

A	B	C	$A - B$	$B - C$	$A - (B - C)$	$(A - B) - C$
V	V	V	F	F		
V	V	F	F	V		
V	F	V	V	F		
V	F	F	V	F		
F	V	V	F	F		
F	V	F	F	V		
F	F	V	F	F		
F	F	F	F	F		

Seguimos completando

$A - (B - C)$ es V si y sólo si A es V y $(B - C)$ es F:

A	B	C	$A - B$	$B - C$	$A - (B - C)$	$(A - B) - C$
V	V	V	F	F	V	
V	V	F	F	V	F	
V	F	V	V	F	V	
V	F	F	V	F	V	
F	V	V	F	F	F	
F	V	F	F	V	F	
F	F	V	F	F	F	
F	F	F	F	F	F	

$(A - B) - C$ es V si y sólo si $(A - B)$ es V y C es F:

A	B	C	$A - B$	$B - C$	$A - (B - C)$	$(A - B) - C$
V	V	V	F	F	V	F
V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	V	F	V	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

comparemos ambas $\Rightarrow A - (B - C) \neq (A - B) - C$

el enunciado es falso!

Notar: vale $A - (B - C) \supsetneq (A - B) - C$

Reescribamos

$$A - (B - C) = A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cup C)$$

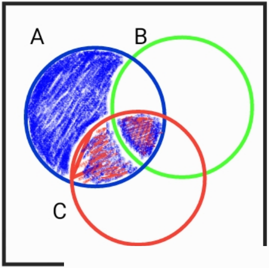
$$= (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$$

$$\supsetneq (A - B) - C = (A \cap B^c) \cap C^c$$

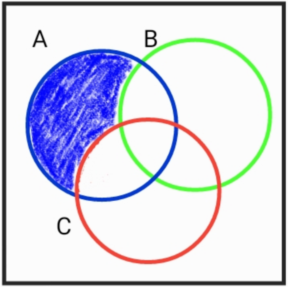
$$= A \cap B^c \cap C^c$$

$$A - (B - C) \supsetneq (A - B) - C$$

$$(A \cap B^c) \cup (A \cap C) \supsetneq (A \cap B^c) \cap C^c$$



U



Veamos la utilidad de las tablas de verdad para comprobar un enunciado más largo: es una estrategia segura!

Ej. 4. Comparar las tablas de verdad de los siguientes enunciados:

$$E_1 : Q \wedge [\sim (P \vee R)]$$

y

$$E_2 : [(\sim P) \wedge Q] \wedge [P \vee (\sim R)]$$

Representar en un diagrama de Venn el resultado en cada caso.

Solución:

Empecemos con E_1: escribamos las $2^3 = 8$ posibilidades para los tres enunciados iniciales:

Q	P	R	$P \vee R$	$\sim (P \vee R)$	$Q \wedge [\sim (P \vee R)]$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

Completemos las 4ta y 5ta columnas:

Q	P	R	$P \vee R$	$\sim (P \vee R)$	$Q \wedge [\sim (P \vee R)]$
V	V	V	V	F	
V	V	F	V	F	
V	F	V	V	F	
V	F	F	F	V	
F	V	V	V	F	
F	V	F	V	F	
F	F	V	V	F	
F	F	F	F	V	

Completemos la última columna:

Q	P	R	$P \vee R$	$\sim (P \vee R)$	$Q \wedge [\sim (P \vee R)]$
V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F
F	F	F	F	V	F

Por otra parte, E_2:

Q	P		R		$(\sim P) \wedge Q$	$P \vee (\sim R)$	$\wedge$
V	V		V				
V	V		F				
V	F		V				
V	F		F				
F	V		V				
F	V		F				
F	F		V				
F	F		F				

Por otra parte, E_2:

Q	P	$\sim P$	R	$\sim R$	$(\sim P) \wedge Q$	$P \vee (\sim R)$	$\wedge$
V	V	F	V	F			
V	V	F	F	V			
V	F	V	V	F			
V	F	V	F	V			
F	V	F	V	F			
F	V	F	F	V			
F	F	V	V	F			
F	F	V	F	V			

Seguimos completando columnas 6 y 7

Q	P	$\sim P$	R	$\sim R$	$(\sim P) \wedge Q$	$P \vee (\sim R)$	$\wedge$
V	V	F	V	F	F		
V	V	F	F	V	F		
V	F	V	V	F	V		
V	F	V	F	V	V		
F	V	F	V	F	F		
F	V	F	F	V	F		
F	F	V	V	F	F		
F	F	V	F	V	F		

Seguimos completando columnas 6 y 7

Q	P	$\sim P$	R	$\sim R$	$(\sim P) \wedge Q$	$P \vee (\sim R)$	$\wedge$
V	V	F	V	F	F	V	
V	V	F	F	V	F	V	
V	F	V	V	F	V	F	
V	F	V	F	V	V	V	
F	V	F	V	F	F	V	
F	V	F	F	V	F	V	
F	F	V	V	F	F	F	
F	F	V	F	V	F	V	

Finalmente, la última columna es el y de las columnas azul y roja:

$$E_2 : [(\sim P) \wedge Q] \wedge [P \vee (\sim R)]$$

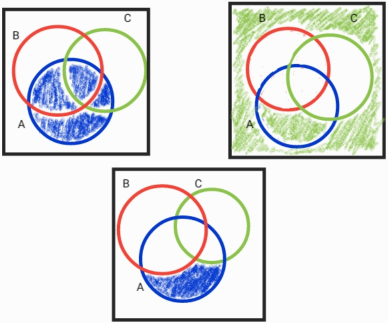
Q	P	$\sim P$	R	$\sim R$	$(\sim P) \wedge Q$	$P \vee (\sim R)$	$\wedge$
V	V	F	V	F	F	V	F
V	V	F	F	V	F	V	F
V	F	V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	F
F	V	F	F	V	F	V	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F

$\Longrightarrow$ *los enunciados E_1 y E_2 son equivalentes*

porque tienen el mismo valor de verdad en todos los casos

¿Qué conjunto representan?

Enunciado E_1 : $Q \wedge [\sim (P \vee R)] \quad \Leftrightarrow \quad$ *conjunto* $A - (B \cup C)$

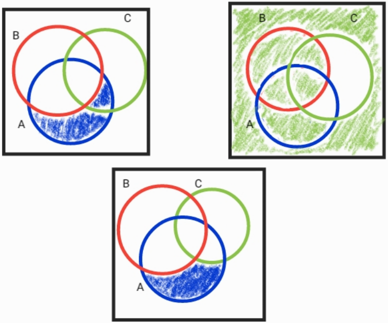


E_2 : $[(\sim P) \wedge Q] \wedge [P \vee (\sim R)] \Leftrightarrow$ *conjunto* $\overbrace{[B^c \cap A] \cap [B \cup C^c]}^{\text{distribuyo la union}}$

$$= \emptyset \cup [B^c \cap A] \cap C^c = [B^c \cap A] \cap C^c = A \cap (B \cup C)^c$$

¿Qué conjunto representan?

Enunciado E_1 : $Q \wedge [\sim (P \vee R)] \quad \Leftrightarrow \quad$ *conjunto* $A - (B \cup C)$



$$E_2 : [(\sim P) \wedge Q] \wedge [P \vee (\sim R)] \Leftrightarrow \text{conjunto } \overbrace{[B^c \cap A] \cap [B \cup C^c]}^{\text{distribuyo la union}}$$

$$= \emptyset \cup [B^c \cap A] \cap C^c = [B^c \cap A] \cap C^c = A \cap (B \cup C)^c$$

Ejercicio 11 de la guía: Comparar las tablas de verdad de

- $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$
- $\sim Q \Rightarrow (\sim P)$
- $P \wedge (\sim Q)$

Veamos que son equivalentes

- P $\Rightarrow$ Q es verdadero: Demostración directa

- $\sim Q \Rightarrow (\sim P)$ es verdadero:
Demostración contrarrecíproca

- $P \wedge (\sim Q)$ es falso: Demostración por el absurdo

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \Rightarrow Q$	$(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$	$P \wedge (\sim Q)$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Veamos que son equivalentes

- P $\Rightarrow$ Q es verdadero: Demostración directa

- $\sim Q \Rightarrow (\sim P)$ es verdadero:
Demostración contrarrecíproca

- $P \wedge (\sim\ Q)$ es falso: Demostración por el absurdo

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \Rightarrow Q$	$\sim Q \Rightarrow (\sim P)$	$P \wedge (\sim Q)$
V	V			V		
V	F			F		
F	V			V		
F	F			V		

Veamos que son equivalentes

- P $\Rightarrow$ Q es verdadero: Demostración directa

- $\sim Q \Rightarrow (\sim P)$ es verdadero:
Demostración contrarrecíproca

- $P \wedge (\sim Q)$ es falso: Demostración por el absurdo

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \Rightarrow Q$	$\sim Q \Rightarrow (\sim P)$	$P \wedge (\sim Q)$
V	V	F	F	V		
V	F	F	V	F		
F	V	V	F	V		
F	F	V	V	V		

Veamos que son equivalentes

- P $\Rightarrow$ Q es verdadero: Demostración directa

- $\sim Q \Rightarrow (\sim P)$ es verdadero:
Demostración contrarrecíproca

- $P \wedge (\sim\ Q)$ es falso: Demostración por el absurdo

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \Rightarrow Q$	$\sim Q \Rightarrow (\sim P)$	$P \wedge (\sim Q)$
V	V	F	F	V	V	
V	F	F	V	F	F	
F	V	V	F	V	V	
F	F	V	V	V	V	

Veamos que son equivalentes

- P $\Rightarrow$ Q es verdadero: Demostración directa

- $\sim Q \Rightarrow (\sim P)$ es verdadero:
Demostración contrarrecíproca

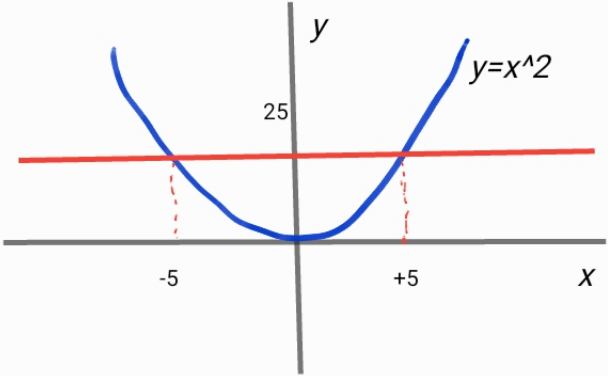
- $P \wedge (\sim Q)$ es falso: Demostración por el absurdo

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \Rightarrow Q$	$\sim Q \Rightarrow (\sim P)$	$P \wedge (\sim Q)$
V	V	F	F	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	F

$P \Rightarrow Q$ verdadero equivale a $[\sim Q \Rightarrow -P]$ verdadero equivale a

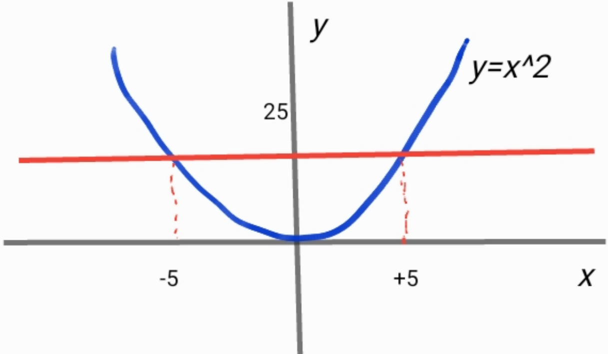
$$P \wedge (\sim Q) \textit{ es falso}$$

Ej 5. Probar $x > 5 \implies x^2 > 25$



Atención: la recíproca no vale

$$x^2 > 25 \not\Rightarrow x > 5$$



Definamos los enunciados P: $x > 5$;   Q: $x^2 > 25$

a) Demostración directa: $P \Longrightarrow Q$
o sea, supongamos P verdadera y probemos Q:
Sea $x > 5 \Longrightarrow x > 0$

$$\mathbb{R}: \quad \text{——}|^{0}\text{——}|^{5}\text{————}$$

$$\Longrightarrow x^2 > 5x \text{ y también } 5x > 25$$

$$\Longrightarrow x^2 > 25$$

b) Demostración contrarrecíproca: supongamos $\sim Q$ y probemos $\sim P$:
es decir, supongamos que $x^2 \leq 25$

$$\Longrightarrow \sqrt{x^2} = |x| \leq 5 \Longrightarrow -5 \leq x \leq 5$$

$$\Longrightarrow x \text{ no es mayor que } 5$$

Otra posibilidad en la demostración contrarrecíproca

supongamos $\sim Q$: $x^2 \leq 25$

$$\Longrightarrow 0 \leq 25 - x^2 = (5 - x)(5 + x)$$

$\Rightarrow x = 5$ ó $x = -5$ ó ambos positivos ó ambos negativos

Si $x \neq \pm 5 \Rightarrow [5 - x > 0] \ \wedge \ [5 + x > 0]$ *o sea* $-5 < x < 5$

ó bien

$$[5 - x < 0] \ \wedge \ [5 + x < 0]$$

pero esto significa $5 < x$ *y a la vez* $x < -5$

lo cual no vale

$\Rightarrow$ *debe ser* $-5 \leq x \leq 5 \Rightarrow x \not> 5 \Rightarrow [\sim P]$ *es verdadera*

c) Demostración por el absurdo: *veamos que si P y $(\sim Q)$ son verdaderas ambas para algún x, se llega a algo falso.*

- Si P es verdadera, x cumple $x > 5$;
- Si $\sim Q$ verdadera entonces $x^2 \leq 25$ entonces

$$\Longrightarrow \sqrt{x^2} = |x| \leq 5$$

$$\Longrightarrow -5 \leq x \leq 5$$

$$\Rightarrow x \in [-5, 5] \cap (5, \infty)$$

$$\Rightarrow [-5, 5] \cap (5, \infty) \neq \emptyset, \ \textit{absurdo}$$

Ejercicio 6: Sabiendo que todo ser humano tiene a lo sumo 1000 pelos en la cabeza y la población mundial es de al menos 1000 millones, probar que en este momento hay al menos dos seres humanos con la misma cantidad de pelos en la cabeza.

Solución. Definir enunciados P*: todo ser humano tiene a lo sumo 1000 pelos en la cabeza y la población mundial es de al menos 1000 millones;*
Q*: hay al menos dos seres humanos con la misma cantidad de pelos en la cabeza*
probar

$$P \Longrightarrow Q$$

Demostración por el absurdo: Supongamos que los 1000 millones de seres humanos tuviéramos todes distinta cantidad, entonces, nos ubicamos en una fila, ordenados según el número de pelos, desde el que tiene

PRODUCTO CARTESIANO

Producto cartesiano: Ejemplos

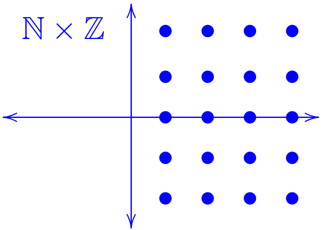
- Ej 7. Definamos $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$

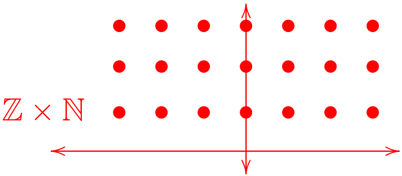
$$A \times B = \{(a, b) = (n, m) : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\}$$

$$B \times A = \{(b, a) = (m, n) : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

$A \times B \neq B \times A$: alcanza con exhibir un par (a,b) en uno que no esté en el otro.
Contraejemplos

- $(1, -1) \in A \times B$ *pero* $(1, -1) \notin B \times A$ dado que $-1 \notin \mathbb{N}$
- $(0, 1) \in B \times A$ *pero* $(0, 1) \notin A \times B$ dado que $0 \notin \mathbb{N}$


$\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$


$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

- Ej. 8. Definamos $C = \mathbb{N}$, $D = \left\{ \dfrac{1}{m} : m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$

$$\Rightarrow C \times D = \{(c, d) = \left(n, \frac{1}{m}\right) : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$$

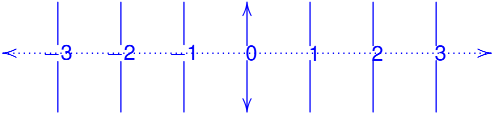
$$C \times D \neq D \times C :$$

$$\left(2, \frac{1}{5}\right) \in C \times D \quad \textit{pero} \quad \left(2, \frac{1}{5}\right) \notin D \times C$$

$$\textit{pues} \quad \frac{1}{5} \notin \mathbb{N}$$

Ej. 9. Dados $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R} = U$, calcular $(A \times B)^c$ y $A^c \times B^c$, ¿son iguales?

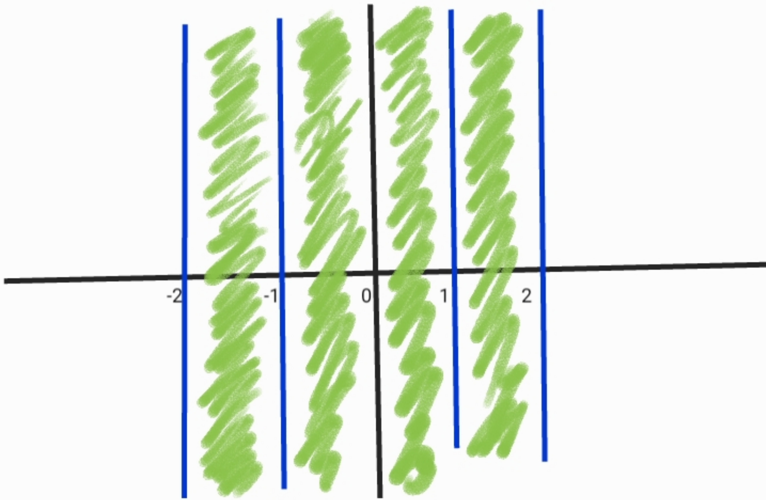
Solución: $A \times B = \mathbb{Z} \times \mathbb{R} = \{(m, t) : m \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}\}$
$\Rightarrow$ *gráficamente se representan en* $\mathbb{R}^2$ *como el conjunto de todas las rectas verticales, una para cada* $n \in \mathbb{Z}$



$$\Rightarrow (A \times B)^c = (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})^c$$

es la union de todos los rectangulos verticales entre las rectas

$(A \times B)^c$



Pero

$$A^c \times B^c = \mathbb{Z}^c \times \mathbb{R}^c = \mathbb{Z}^c \times \emptyset = \emptyset$$

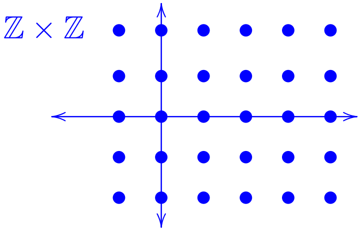
Por lo tanto, $(A \times B)^c$ y $A^c \times B^c$ en general son distintos!

Ej 10. Probar que si $A = B = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ entonces

$$(A \times B)^c \subset \mathbb{R}^2 \text{ no es un producto cartesiano}$$

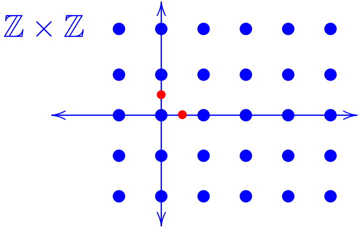
es decir, no se puede escribir en la forma $X \times Y$ para ninguna elección de X e Y.

$$\text{Solución:} \quad A \times B = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$$



Demostración por el absurdo: Si $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^c$ fuera un producto cartesiano, digamos

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^c = X \times Y$$



Entonces por ejemplo

$$(0, 1/2) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^c = X \times Y \Rightarrow 0 \in X$$

$$(1/2, 0) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^c = X \times Y \Rightarrow 0 \in Y$$

$\Rightarrow (0, 0) \in X \times Y = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^c$, absurdo pues $(0, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$