Práctica 5

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Para cada partición π de $[a, b]$ (si $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$) se define
$$\pi(f) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|,$$
Demostrar que si $\pi_1 \subset \pi_2$ son dos particiones de $[a, b]$, entonces $\pi_1(f) \leq \pi_2(f)$.

2. Estudiar si las funciones que siguen son de variación acotada en el intervalo $[a, b]$ correspondiente y en el caso afirmativo dar una mayoración para $V_f(a, b)$.

   (a) $f(x) = \cos(x)$ en $[0, 3\pi]$ (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   (c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ en $[-1, 2]$ (d) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)^2 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   En el caso (d) estudiar también la derivabilidad de f.

3. Demostrar que si f y g son funciones de variación acotada en $[a, b]$ entonces fg también lo es.

4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Probar que $V_f(a, b) = f(b) - f(a)$ si y sólo si f es monótona creciente en $[a, b]$.

5. Para las funciones de variación acotada que siguen, hallar la función V_f (recordamos que $V_f(a) = 0$ y $V_f(x) = V_f(a, x)$ si $a < x \leq b$):

   (a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ (b) $f(x) = \sin x$ en $[0, 2\pi]$

   Para cada función encontrar explícitamente funciones monótonas crecientes g_1 y g_2 tales que $f = g_1 - g_2$.

6. Demostrar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función de variación acotada entonces es integrable Riemann.

7. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en $[a, b]$. Demostrar que f es de variación acotada y que vale la igualdad $V_f(a, b) = \int_a^b |f'(x)|\, dx$.

8. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de Lipschitz. Probar que V_f es una función de Lipschitz con la misma constante de Lipschitz que f.

9. Decidir si las funciones del ejercicio 6 de la práctica 4 son integrables Riemann.

10. Analizar en cada caso la existencia de $\int\limits_a^b f\ d\alpha$ y calcularla cuando corresponda.

    (a) $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función arbitraria y f una función constante sobre $[a,b]$.

    (b) $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua con $\alpha(a) = a_0$, $\alpha(b) = b_0$; $c \in (a,b)$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $\quad f(x) := \begin{cases} 5 & \text{si } x \in [a,c) \\ 3 & \text{si } x = c \\ -1 & \text{si } x \in (c,b] \end{cases}$.

    ¿Qué sucede si en lugar de tomar α continua sólo se sabe que α es continua en un entorno de c?

    (c) f como en el ítem anterior y $\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,c] \\ -1 & \text{si } x \in (c,b] \end{cases}$.

11. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$, tales que f es continua e integrable respecto de α en $[a,b]$ y sea c en (a,b). Si $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisface $\beta(x) = \alpha(x)$ para todo $x \neq c$, probar que $f \in \Re(\beta)$ en $[a,b]$ y $\int\limits_a^b f\ d\alpha = \int\limits_a^b f\ d\beta$.

    ¿Qué sucede si $c = a$ o $c = b$?.

12. Dadas las funciones siguientes definidas en el intervalo $[0,2]$: $f(x) = |x-1|$, $\alpha(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x = 0 \\ e^x & \text{si } x \in (0,2], \end{cases}$ demostrar que $f \in \Re(\alpha)$ en $[0,2]$ y calcular $\int\limits_0^2 f\ d\alpha$.

13. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $c \in (a,b)$ tales que $f \in \Re(\alpha)$ en $[a,c]$ y $f \in \Re(\alpha)$ en $[c,b]$. Demostrar que $f \in \Re(\alpha)$ en $[a,b]$ y $\int\limits_a^b f\ d\alpha = \int\limits_a^c f\ d\alpha + \int\limits_c^b f\ d\alpha$.

14. Supongamos que $\int\limits_a^b f d\alpha$ existe y es igual a 0 para toda función monótona creciente f. ¿Qué puede decir sobre la función α?

    Sugerencia. Para cada $c \in [a,b]$ considere la función monótona f_c definida como $f_c(x) = 0$ si $a \leq x \leq c$ y $f_c(x) = 1$ sino.

15. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$. Para cada partición $\pi = \{x_0, ..., x_n\}$ del intervalo $[a,b]$, se define $s_\pi := \sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$, donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

    Demostrar que si $f \in \Re(\alpha)$ entonces existe una sucesión de particiones $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ que cumple las condiciones:

    (a) $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es monótona en el sentido siguiente: si $m < m'$ entonces $\pi_m \subset \pi_{m'}$.

    (b) $\lim\limits_{m\to\infty} \parallel \pi_m \parallel = 0$.

    (c) $\lim\limits_{m\to\infty} s_{\pi_m} = \int\limits_a^b f\ d\alpha$, independientemente de la elección de los t_k en cada suma s_{π_m}.

(d) Toda otra sucesión $(\sigma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ monótona de particiones tal que $\pi_m \subset \sigma_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande cumple las condiciones (b) y (c) precedentes.

Si ahora $g, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ son otras funciones, tales que $g \in \Re(\beta)$ y para cada partición π notamos $r_\pi := \sum\limits_{k=1}^{n} g(t_k)[\beta(x_k) - \beta(x_{k-1})]$, donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, deducir que entonces existe una sucesión de particiones $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} s_{\pi_m} = \int\limits_a^b f d\alpha$ y $\lim\limits_{m\to\infty} r_{\pi_m} = \int\limits_a^b g\ d\beta$.

16. (Otra definición de integral de Riemann-Stieltjes)

Con las mismas notaciones que en el ejercicio anterior: *sean* $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$, *diremos que* f *es* <u>*integrable Riemann-Stieltjes*$^\bigstar$</u> *con respecto a la función* α *(notaremos* $f \in \Re^\bigstar(\alpha)$*) si se cumple: existe un* $A \in \mathbb{R}$ *tal que para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\mid s_\pi - A \mid < \varepsilon$ *para toda partición* π *con* $\| \pi \| < \delta$*, independientemente de los valores de* t_k*. En este caso diremos que* A *es la integral de Riemann-Stieltjes*$^\bigstar$ *de* f *respecto a* α*. Si* $\alpha(x) = x$ *para todo* $x \in [a,b]$*, decimos que* f *es es* <u>*integrable Riemann*$^\bigstar$</u> *y* A *es la integral de Riemann*$^\bigstar$ *de* f*.*

(a) Demostrar que $\Re^\bigstar(\alpha) \subseteq \Re(\alpha)$.

(b) Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ definidas así: si $c \in (a,b)$ entonces $f(x) = \alpha(x) = 0$ para $a \le x < c$, $f(x) = \alpha(x) = 1$ para $c < x \le b$, $f(c) = 0$ y $\alpha(c) = 1$. Demostrar que $f \in \Re(\alpha)$ pero que $f \notin \Re^\bigstar(\alpha)$.

(c) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Probar que $f \in \Re(\alpha)$ si y sólo si $f \in \Re^\bigstar(\alpha)$. En particular, f es integrable Riemann si y sólo si f es integrable Riemann$^\bigstar$.

[<u>Nota</u>: de la parte (b) del ejercicio se deduce que la definición de integral de Riemann-Stieltjes$^\bigstar$ no es equivalente a la dada en clase; sin embargo la mayoría de los resultados generales se preservan con ligeras modificaciones.]

17. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable.

(a) Probar que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

(b) Calcular $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} i^k}{n^{k+1}}$ para todo $k \ge 0$.

18. Sean $f; \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $c \in (a,b)$ tales que $\int\limits_a^c f\ d\alpha$ y $\int\limits_c^b f\ d\alpha$ existen. Demostrar que $\int\limits_a^b f d\alpha$ también existe y que vale la igualdad: $\int\limits_a^c f\ d\alpha + \int\limits_c^b f\ d\alpha = \int\limits_a^b f\ d\alpha$.

19. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente. Demostrar que si $f \in \Re(\alpha)$ en $[a,b]$ y $[c,d] \subset [a,b]$, entonces $f \in \Re(\alpha)$ en $[c,d]$.

20. Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente, discontinua en un punto $c \in (a,b)$. Sea $f \in \Re(\alpha)$. Probar que f es continua en c.

21. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente.

    (a) Demostrar que existe $c \in (a,b)$ tal que $\int\limits_a^b f\ d\alpha = f(c)\,(\alpha(b) - \alpha(a))$.

    (b) Suponiendo que α es además derivable en (a,b),(pero no necesariamente de clase C^1), demostrar que la función

    $$\psi(x) = \int_a^x f\ d\alpha$$

    es derivable en (a,b) y que $\psi'(x) = f(x)\alpha'(x)$ para todo $x \in (a,b)$.

22. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente. Demostrar que si $f, g \in \Re(\alpha)$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int\limits_a^b f\ d\alpha \leq \int\limits_a^b g\ d\alpha$.

    Deducir que si $f \in \Re(\alpha)$ entonces $\left|\int_a^b f\ d\alpha\right| \leq \int\limits_a^b |f|\ d\alpha$.

23. Para cada $x \in \mathbb{R}$ vamos a notar con $\lfloor x \rfloor$ a la parte entera de x, es decir: $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \ / \ n \leq x\}$. También denotaremos $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$. Analizar la existencia de las integrales que siguen y en caso afirmativo calcularla:

    (a) $\int\limits_0^4 x^2\ d(\lfloor x \rfloor)$ (b) $\int\limits_0^2 x\ d(\{x\})$ (c) $\int\limits_0^2 x^2\ d(|x|)$

24. (Integrales y series)

    (a) Sea $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

    $$I(x) := \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases} .$$

    Sean $(c_n)_n$ una sucesión de números reales no negativos tal que $\sum_n c_n$ y $(s_n)_n \subseteq (a,b)$ una sucesión de puntos distintos dos a dos. Probar que para todo $x \in [a,b]$, $\alpha(x) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - s_n)$ es una función monótona creciente, con la siguiente propiedad: para toda $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, se tiene

    $$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n).$$

    (b) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ una sucesión estrictamente creciente tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a_n) = 1/n$. Definir $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ creciente y acotada de manera que $f \in \mathcal{R}[\alpha]$ y

    $$\int_0^1 f d\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}.$$

    Determinar la función variación V_α, para la función α encontrada.

25. (Integración por partes) Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $f \in \Re(\alpha)$ en $[a,b]$. Probar que $\alpha \in \Re(f)$ en $[a,b]$ y que vale

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x)df(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

26. (Fórmula de sumación de Euler-Maclaurin de orden 0) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable tal que f' es continua en $[a,b]$. Probar que

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) := \sum_{n=\lfloor a\rfloor+1}^{\lfloor b\rfloor} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)\{x\}dx + f(a)\{a\} - f(b)\{b\}.$$

En particular, si a y b son enteros, esta cantidad es

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)\left(\{x\} - \frac{1}{2}\right)dx + \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

27. Sea $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que f es una función continua y α es de variación acotada.

   (a) Demostrar que $|f| \in \Re(V_\alpha)$.

   (b) Demostrar que vale la desigualdad $\left|\int_a^b f\ d\alpha\right| \leq \int\limits_a^b |f|\ dV_\alpha$. *Sugerencia.* Tener en cuenta el Ejercicio 15.

   (c) Deducir de (b) que $\left|\int_a^b f\ d\alpha\right| \leq V_\alpha(a,b) \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

   (d) Para cada $x \in [a,b]$ se define $\psi(x) = \int_a^x f\ d\alpha$ (observar que ψ está bien definida). Probar que ψ es de variación acotada.

   (e) Si α es Lipschitz en $[a,b]$, probar que la función ψ definida en el ítem anterior también es Lipschitz en $[a,b]$.

28. (Límites e integrales de Riemann-Stieljes)

   (a) Sean $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada y $(f_n)_n$ una sucesión de funciones $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $f_n \in \Re(\alpha)$ para todo n. Probar que si $(f_n)_n$ converge uniformemente en $[a,b]$ a f, entonces $f \in \Re(\alpha)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n d\alpha = \int_a^b f d\alpha.$$

   (b) Sea $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ de variación acotada. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n d\alpha.$$

$*$ 29. (Fórmula de Stirling)

(a) (Euler-Maclaurin de orden 1) Sea $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a < b$. Definimos $B_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como la función $B_2(x) := \{x\}^2 - \{x\} + \frac{1}{6}$. Probar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función dos veces derivable con f'' continua en $[a, b]$, se tiene

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = \int_m^n f(x)dx + \frac{f(m) + f(n)}{2} + \frac{1}{6}\frac{f'(n) - f'(m)}{2!} - \int_m^n f''(x)\frac{B_2(x)}{2!}dx.$$

(b) Usar el ítem anterior con $f(x) = \log(x)$ para probar que para todo n,

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{An}a_n,$$

donde $(a_n)_n$ es una sucesión que tiende a 1, y A es una constante positiva.

(c) Usar integración por partes para probar que la sucesión $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt$ verifica $nW_n = (n-1)W_{n-2}$ para todo $n \geq 2$. Deducir que para todo n, $\lim_{n\to\infty} \frac{W_{2n}}{\frac{\pi}{\sqrt{2An}}} = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{W_{2n+1}}{\sqrt{\frac{A}{8n}}} = 1$.

(d) Probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{W_n}{W_{n+1}} = 1$ y que $A = 2\pi$. Deducir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

$*$30. (Irracionalidad de π) Para todo $n \in \mathbb{N}_0$ sea $P_n(x) := \dfrac{(x(\pi - x))^n}{n!}$. Definimos

$$I_n := \int_0^\pi P_n(x)\sin(x)dx.$$

(a) Probar que para todo $n \geq 2$ se tiene que

$$P_n''(x) = \pi^2 P_{n-2}(x) - (4n-2)P_{n-1}(x).$$

(b) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $I_n = -\displaystyle\int_0^\pi P_n''(x)\sin(x)dx$.

(c) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ existe un polinomio $Q_n(X)$ con coeficientes enteros, de grado a lo sumo n, tal que $I_n = Q_n(\pi^2)$.

(d) Probar que π^2 es irracional.

Sugerencia: Supongamos que $\pi^2 = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{N}$. Por el ítem anterior, cada $b^n I_n = b^n Q_n(\frac{a}{b})$ es un entero. Del hecho que $x(\pi - x)$ toma su valor máximo en $\frac{\pi}{2}$, deducir la desigualdad

$$0 < b^n I_n = b^n \int_0^\pi \frac{(x(\pi - x))^n}{n!}\sin(x)dx < \frac{\left(\frac{b\pi^2}{4}\right)^n}{n!}\pi.$$

(e) Concluir que π es irracional.