Práctica 3: Topología de $\mathbb{R}^n$

1. Decir qué propiedades (abierto, cerrado, acotado) tienen los siguientes conjuntos:

   a) $\mathbb{Q}$.

   b) $\mathbb{N}$.

   c) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

   d) $(0, 1]$.

   e) $\left\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

   f) $\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

2. Sean S, T subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Demostrar las propiedades siguientes:

   a) Si $S \subseteq T$ entonces $S^\circ \subseteq T^\circ$.

   b) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$. Exhibir una familia infinita $\{S_i\}_{i \in I}$ para la cual se tiene que $(\bigcap_{i \in I} S_i)^\circ \neq \bigcap_{i \in I} S_i^\circ$.

   c) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta.

   d) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$. ¿Vale lo mismo consideramos la unión sobre una familia infinita de conjuntos?

   e) $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$. ¿La inclusión puede ser estricta?.

   f) $(\mathbb{R}^n \setminus S)^\circ = \mathbb{R}^n \setminus \overline{S}$.

3. En cada uno de los siguientes casos hallar $S^\circ, \overline{S}$ y ∂S.

   a) $S = [0, 1]$.

   b) $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

   c) $S = [-1, 0) \cup \{1\}$.

   d) $S = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

   e) $\left\{\frac{(-1)^n n}{1+n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

   f) $S = \mathbb{Z}$.

4. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$. Demostrar :

   a) S es abierto si y solo si es disjunto con ∂S.

   b) S es cerrado si y solo si $\partial S \subset S$.

   c) S es cerrado si y solo si $S = S^\circ \cup \partial S$.

5. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Demostrar que $\partial S = \overline{S} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus S}$. Interpretar gráficamente.

6. Si $S \subseteq \mathbb{R}$, notamos con S' al conjunto de todos los puntos de acumulación de S.

   a) Hallar S' para cada uno de los conjuntos del Ejercicio 3.

   b) Un punto $p \in S$ se dice *punto aislado* de S si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \cap S = \{p\}$. Demostrar que $\overline{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}$.

7. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \left\{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) : n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

8. Hallar todos los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ que son a la vez abiertos y cerrados.

9. Decidir verdadero o falso:

   a) Si $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ son cerrados entonces $A + B$ es cerrado.

   b) Si $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ son abiertos entonces $A + B$ es abierto.

10. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, y sea $x \in U$. Supongamos que $(a_n)_n$ es una sucesión que converge a x. Probar que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin U\}$ es finito.

11. Decir qué propiedades (abierto, cerrado, acotado) tienen los siguientes conjuntos.

    (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 1\}$.

    (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > y\}$.

    (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy > 0\}$.

    (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = y\}$.

12. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}$. Hallar la clausura $\overline{S}$.

13. Probar que la clausura de $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - x^2 - y^2 > 0\}$ no es $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - x^2 - y^2 \geq 0\}$. Calcular $\overline{S}$.

14. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y denso. Probar que $A + A = \mathbb{R}^n$.

15. Sea $S = \{x \in \mathbb{Q} : x = \frac{n}{2^m} : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$. Calcular $\overline{S}$. El conjunto S se conoce como *el conjunto de los racionales* 2*-ádicos*.

16. Sea $U_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \parallel (x, y) - (0, n) \parallel_2 < n\}$. Demostrar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ es el semiplano superior abierto.

17. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se considera el intervalo abierto $I_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$. Demostrar que $(0, 1) = \bigcup_{n \geq 2} I_n$. ¿Existe un conjunto *finito* $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $(0, 1) = \bigcup_{n \in \mathcal{F}} I_n$? Justificar. ¿Qué puede decir sobre la compacidad del conjunto $(0, 1)$?

18. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son compactos:

    a) $\mathbb{Q}$.

    b) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

    c) $\mathbb{R}$.

    d) $[0, 1] \cup [100, 1000]$.

    e) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

    f) $\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

19. Sea K un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}$. Probar que K tiene mínimo y máximo.

20. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada y sea P el conjunto de sus puntos límite. Probar que P es compacto. Mostrar que el límite inferior de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es el mínimo de P y el límite superior de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ el máximo.

21. Sean $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos compactos. Demostrar que $S \cup T$ y $S \cap T$ son compactos. ¿Qué ocurre si se toman uniones o intersecciones infinitas?

22. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Demostrar que S es compacto si y sólo si toda sucesión contenida en S contiene una subsucesión que converge a un punto de S.

23. Mostrar que si K es compacto y F es cerrado, entonces $K \cap F$ es compacto.

24. Sean $K_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $K_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ compactos. Probar que $K_1 \times K_2 \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ es compacto.

25. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Supongamos que para todo $m \in \mathbb{N}$ tenemos un subconjunto cerrado $F_m \subseteq \mathbb{R}^n$, y estos subconjuntos satisfacen la condición

$$K \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$$

Probar que al menos una de las siguientes dos propiedades ocurre:

- Existe m_0 tal que $F_{m_0} = \varnothing$;
- $\cap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

26. Determinar todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que tienen la siguiente propiedad: *Todo cubrimiento cerrado tiene un subcubrimiento finito.*

27. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto. Probar que los siguientes conjuntos también son compactos:

- $S = \{x + y : x, y \in K\}$;
- $P = \{x \cdot y : x, y \in K\}$.

28. Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto y consideremos $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de K. Probar que existe un $\varepsilon > 0$ tal que si $k \in K$ entonces existe $i_0 \in I$ tal que resulta $(k - \varepsilon, k + \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$.

29. (Conjunto de Cantor) Dado $n \in \mathbb{N}_0$, definimos un subconjunto $C_n \subseteq \mathbb{R}$ de la siguiente manera. Definimos $C_0 := [0, 1]$. Para definir C_1, dividimos C_0 en los intervalos $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$ y le extraemos a C_0 el intervalo abierto del medio:

$$C_1 := C_0 \backslash \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Construimos C_2 de manera similar: dividimos cada intervalo $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$ en tres intervalos de la misma longitud, y les extraemos los intervalos abiertos centrales:

$$C_2 := C_1 \backslash \left(\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right) = \left(\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]\right) \cup \left(\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]\right).$$

Continuando de esta manera, tenemos definido C_n, que es unión finita disjunta de intervalos cerrados $\{I_j\}_j$. Definimos C_{n+1} a partir de C_n, extrayéndole el intervalo abierto central a cada uno de los intervalos I_j. Definimos el conjunto de Cantor como el conjunto

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

a) Probar que C es un conjunto compacto.

b) Probar que C es un conjunto *perfecto*, es decir, es cerrado y todo punto de C es un punto de acumulación de C.

c) Definimos la sucesión $a_n := 3^{-n}$. Consideramos el conjunto

$$S := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n a_n \in \mathbb{R} : \forall n \ \mu_n \in \{0, 2\} \right\}.$$

Probar que $S = C$. Más aún, si $s \in S$ cumple que $s = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n a_n$ con $\mu_n = 0$ para todo n suficientemente grande, probar que s es uno de los extremos de los intervalos substraídos en los conjuntos C_j utilizados para construir C.

d) Probar que $C + C = [0, 2]$.

30. Una *norma* sobre $\mathbb{R}^n$ es una función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que:

- $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\|x\| = 0$ si y solamente si $x = 0$;
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo x, $y \in \mathbb{R}^n$.

a) Muestre que las funciones $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \qquad \|x\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ son normas. Si $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una norma, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y cada $\varepsilon > 0$ llamamos *bola centrada en x de radio ε* al conjunto

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \varepsilon\}.$$

b) Muestre que existen constantes positivas c, c', d, d' tales que

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c'\|x\|_1, \qquad d\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq d'\|x\|_\infty$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Sugerencia: Primero resuelva el problema en el caso $n = 2$. Dibuje las bolas de radio 1 centradas en cero para las tres normas.

c) Decimos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto con respecto a $\|\cdot\|$ si para todo $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq A$. Muestre que un conjunto es abierto con respecto a $\|\cdot\|_1$ si y solo si es abierto con respecto a $\|\cdot\|_2$, si y solo si es abierto con respecto a $\|\cdot\|_\infty$.

d) Si $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una norma, decimos que una sucesión $(x_k)_{k \geq 1}$ en $\mathbb{R}^n$ converge a $x \in \mathbb{R}^n$ con respecto a $\|\cdot\|$ si

$$\lim_{k \to \infty} \|x_k - x\| = 0.$$

Muestre que una sucesión $(x_k)_{k \geq 1}$ converge a $x \in \mathbb{R}^n$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_1$ si y solo si lo hace con respecto a la norma $\|\cdot\|_2$, si y solo si lo hace con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$.

$*$ 31. Sea $\xi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ y consideremos el conjunto $\mathbb{Z}\xi := \{a\xi : a \in \mathbb{Z}\}$. Probar que $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\xi$ es denso en $\mathbb{R}$.

$*$ 32. Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales.

a) Supongamos que para todo n, $a_{n+1} - a_n > -\lambda_n$, donde $\lambda_n > 0$ tal que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Si $l = \liminf_{n\to\infty} a_n$ y $L = \limsup_{n\to\infty} a_n$, probar que cada número en el intervalo abierto (l, L) es un punto límite de $(a_n)_n$.

b) Supongamos que $(a_n)_n$ es una sucesión de números reales positivos que es monótona creciente. Calcular la clausura del conjunto $\{\frac{a_n}{n+a_n} : n \in \mathbb{N}\}$.

33. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos conexos de $\mathbb{R}^n$ tal que $\bigcap_{i\in I} U_i \neq \varnothing$. Probar que $\bigcup_{i\in I} U_i$ es conexo.

34. *a*) Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Probar que I es conexo.

b) Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ un abierto conexo no vacío. Probar que U es un intervalo abierto.

c) Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto no vacío. Probar que U es unión disjunta de intervalos abiertos.

$*$ 35. Sea $U = (0, 1) \times (0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$. Probar que U es un abierto que no es unión disjunta de discos abiertos.

36. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice *totalmente disconexo* si las componentes conexas de A son sus puntos.

a) Dar un ejemplo de un conjunto totalmente disconexo $A \subseteq [0, 1]$ tal que $\overline{A} = [0, 1]$.

b) Escribir $\mathbb{R}$ como unión de dos conjuntos totalmente disconexos.

c) Probar que el conjunto de Cantor es totalmente disconexo.