Práctica 2: Series numéricas

1. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2+3}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$

   (j) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(n))^{\log(n)}}$ (k) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\log(n))^{\log\log(n)}}$.

2. Hallar la suma de las siguientes series:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ (*sug.:* fracciones simples)

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$

3. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-4n+2}{n!}$.

   Sugerencia: descomponer el término general en la forma

$$\frac{3n^2-4n+2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$$

4. Cuántos primeros términos hay que tomar en las series siguientes para que su suma difiera no más que en $1/10^6$ de la suma de las series correspondientes:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

5. ¿Es cierto que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ son dos series divergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_k b_k$ es divergente?

6. i) Demostrar la desigualdad

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

   Sugerencia: Recordar la demostración del criterio de comparación con una integral impropia.

ii) Si $r_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$, demostrar que r_n converge.
Nota: El límite de r_n se conoce como la *constante de Euler-Mascheroni*. Su valor aproximado es
$0,57721566490153286060651209008240243104215933593992\ldots$.

7. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_n \geq 0$ para todo n, y tal que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ es convergente.

8. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_n > 0$ para todo n, y tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie divergente. Sea $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_i$ la n-ésima suma parcial.

   (a) Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ es divergente.

   (b) Probar que para todo $N, k \in \mathbb{N}$ se tiene
   $$\frac{a_{N+1}}{S_{N+1}} + \cdots + \frac{a_{N+k}}{S_{N+k}} \geq 1 - \frac{S_N}{S_{N+k}},$$
   y deducir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ es una serie divergente. En particular, no existe una serie divergente más "chica".

   (c) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ se tiene
   $$\frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n},$$
   y deducir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ es una serie convergente.

   (d) ¿Qué puede decirse acerca de la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2a_n}$?

9. Supongamos que $a_n > 0$ y que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Pongamos $r_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m$.

   (a) Probar que
   $$\frac{a_m}{r_m} + \cdots \frac{a_n}{r_n} > 1 - \frac{r_n}{r_m}$$
   si $m < n$, y deducir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$ es divergente.

   (b) Probar que
   $$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$$
   y deducir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ es convergente.

10. Probar el siguiente criterio de convergencia (condensación de Cauchy): Sea b_n una sucesión decreciente de números no negativos. Entonces la serie $\sum b_n$ converge si y sólo si la serie $\sum 2^n b_{2^n}$ converge.

11. El objetivo de este ejercicio es probar algunos criterios de convergencia.

   (a) (Criterio de Kummer) Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales positivos. Definimos
   $$\kappa_n := d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1}.$$

Probar que si existe $C > 0$ tal que $\kappa_n > C$ para todo n suficientemente grande, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. Por otro lado, probar que si $\kappa_n \leq 0$ para todo n suficientemente grande y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n}$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(b) (Criterio de Raabe) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos, y supongamos que podemos escribir

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta_n}{n},$$

donde $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión con $\limsup_{n\to\infty} \beta_n = \beta_+$ y $\liminf_{n\to\infty} \beta_n = \beta_-$. Probar que si $\beta_- > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, mientras que si $\beta_+ < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(c) (Criterio de Gauss) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos, y supongamos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+k}},$$

donde $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada y $k > 0$. Probar que si $\beta > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, mientras que si $\beta \leq 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente. *Sugerencia*: Si $\beta \neq 1$, utilizar el criterio de Raabe. Si $\beta = 1$, aplicar el criterio de Kummer con $d_n = n\log(n)$.

12. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log(n)}}$

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{\log\log(n)}}$ (e) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\prod_{j=3}^{n}(2j-5)}{\prod_{j=3}^{n}(2j-2)}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!n!4^n}{(2n)!\sqrt{n}}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)}{\prod_{i=1}^{n}(2i)(n+1)}$ (h) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n}(a+i-1)}{\prod_{i=1}^{n}(b+i-1)}$ $(a, b > 0)$

13. Probar el siguiente teorema de Abel: Si $(a_n)_n$ es una sucesión decreciente de números positivos, y si $\sum a_n$ converge, entonces $na_n \to 0$ si $n \to \infty$.

Sug.: $na_{2n} \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} \to 0$ si $n \to \infty$, y similarmente para na_{2n+1}.

14. Decir si las siguientes series convergen condicional o absolutamente:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n)}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 2n - 1}{n!}.$$

15. (a) Mostrar que si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum a_n^2$ converge. ¿Vale este resultado si $\sum a_n$ converge sólo condicionalmente?

(b) ¿Si $\sum a_n$ converge y $a_n \geq 0$, se puede concluir algo de $\sum \sqrt{a_n}$?

16. Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ sucesiones de números reales. Llamemos $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

   (a) Probar la siguiente fórmula de suma por partes:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_{k+1} - b_k).$$

   (b) Probar que si $\sum_{n=1}^\infty S_n(b_{n+1} - b_n)$ es convergente y existe el límite de la sucesión $(S_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ es convergente.

   (c) (Criterio de Dirichlet) Sea $\sum_{n=1}^\infty a_n$ una serie con sumas parciales acotadas, y sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona que converge a 0. Probar que $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ es convergente.

   (d) (Criterio de Abel) Sea $\sum_{n=1}^\infty a_n$ una serie convergente, y sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona acotada. Probar que $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ es convergente.

   $*$ (e) (Criterio de Dedekind, Bois-Reymond) Sea $\sum_{n=1}^\infty a_n$ una serie convergente, y sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{n=1}^\infty (b_n - b_{n+1})$ es absolutamente convergente. Probar que $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ es convergente. Similarmente, probar que si $\sum_{n=1}^\infty a_n$ tiene sumas parciales acotadas, $b_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $\sum_{n=1}^\infty (b_n - b_{n+1})$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ es convergente.

17. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{n=1}^\infty a_n$ es convergente. Probar que $\sum_{n=1}^\infty a_n x^n$ es convergente para todo x en $(-1, 1]$. Similarmente, si $\sum_{n=1}^\infty a_n$ tiene sumas parciales acotadas, probar que $\sum_{n=1}^\infty a_n x^n$ es convergente para todo x con $|x| < 1$.

18. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Supongamos que existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^\xi}$ es convergente. Probar que para todo $x > \xi$ se tiene que $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^x}$ es convergente.

19. Probar que la serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(j)}{j}$ es convergente. ¿Qué ocurre con la convergencia de las series $\sum_{n=1}^\infty \frac{|\sin(n)|}{n}$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin^2(n)}{n}$?

   Sugerencia: Usar el criterio de Dirichlet y la identidad

$$\sin(n) = \frac{\cos(n - \frac{1}{2}) - \cos(n + \frac{1}{2})}{2\sin(\frac{1}{2})}.$$

20. Hallar los valores de x para los cuales convergen las series:

   (a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{2^n}$

   (b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$

   (c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

   (d) $\sum_{n=1}^\infty 2^n \sin(\frac{x}{3^n})$

   (e) $\sum_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-2)^n$

   (f) $\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n n!}{n^n}(x+1)^n$

   (g) $\sum_{n=1}^\infty 3^{n^2} x^{n^2}$

   (h) $\sum_{n=1}^\infty n!(x+1)^n$

21. (Sumas dobles) Sea $(a_{i,j})_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{N}}$ una sucesión doblemente indexada, que puede pensarse como la matriz infinita

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Dados $n, m \in \mathbb{N}$, definimos $S_{n,m} := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$ (notar que no importa el orden de la suma porque es una suma de finitos términos). Si la sucesión $(S_{n,n})_n$ converge, definimos la serie iterada $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j} := \lim_{n\to\infty} S_{n,n}$. Por otro lado, si para todo i, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$ converge a b_i, y la serie $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ converge, definimos la serie iterada $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j} := \sum_{i=1}^{\infty} b_i$.

(a) Supongamos que la serie iterada $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}|$ converge. Probar que la serie iterada $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$ converge.

(b) Supongamos que la serie iterada $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}|$ converge.

i. Dados $n, m \in \mathbb{N}$ definimos $T_{m,n} := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$. Probar que el conjunto $\{T_{m,n} : m, n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente, y concluir que $(T_{n,n})_n$ converge. Deducir que $(S_{n,n})_n$ converge.

ii. Sea $S = \lim_{n\to\infty} S_{n,n}$. Probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que para todo $m, n \geq N$ se tiene $|S_{m,n} - S| < \varepsilon$.

iii. Probar la igualdad de series iteradas

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}.$$

Sugerencia: Dado $m \in \mathbb{N}$, escribir $S_{m,n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} + \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}$. Para un i fijo, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$ converge absolutamente a un número real b_i. Probar que dado ε existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq N$, $|(b_1 + b_2 + \cdots + b_m) - S| < \varepsilon$.

iv. Sean $d_2 = a_{1,1}$, $d_3 = a_{1,2} + a_{2,1}$, $d_4 = a_{1,3} + a_{2,2} + a_{3,1}$, y en general, dado $n \in \mathbb{N}$ definimos $d_n := \sum_{k=1}^{n} a_{k,n-k}$. Probar que $\sum_{n=2}^{\infty} d_n$ converge absolutamente a S.

22. (Productos de Cauchy) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie que converge absolutamente a A y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ una serie que converge absolutamente a B. Para todo $n \geq 2$, sea $d_n := \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$. *El producto de Cauchy entre* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es la serie $\sum_{k=2}^{\infty} d_k$.

(a) Probar que la serie iterada $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |a_n b_m|$ converge.

(b) Sea $S_{nn} := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j$. Probar que $\lim_{n\to\infty} S_{nn} = AB$. Concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_m = \sum_{k=2}^{\infty} d_k = AB.$$

23. (a) Mostrar un ejemplo de una sucesión $(a_{n,m})_{n,m}$ para la cual las series iteradas $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}$, $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}$ y $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{n,m}$ no cumplen la conclusión del ejercicio 21(b)iii.

(b) Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie absolutamente convergente a S. Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, definimos $b_n := \sum_{i=0}^{n} \frac{2^i a_i}{2^{n+1}}$, $c_n := \sum_{i=0}^{n} \frac{(i+1)a_i}{(n+1)(n+2)}$. Probar que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ son series que convergen a S.

(c) Mostrar un ejemplo de dos series convergentes $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tales que su producto de Cauchy no resulte convergente.

24. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números enteros, tal que $a_n \neq 0$ para infinitos n. Probar que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene radio de convergencia ≤ 1.

25. Si

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots \qquad \text{si } |x| < 1,$$

encontrar una serie de potencias para $1/(1-x)^k$, k natural, en $|x| < 1$.

$*$26. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, denotamos $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

(a) Sea $\alpha > -1$. Probar que para todo $n > m$, $|\binom{\alpha}{n}| = |\binom{\alpha}{m}| \prod_{i=m+1}^{n}(1 - \frac{\alpha+1}{i})$. Concluir que $\binom{\alpha}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

(b) (Serie binomial) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinar todos los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ es convergente.
Sugerencia: Para estudiar la convergencia en $x = 1$, separar en los casos $\alpha+1 \leq 0$ y $\alpha + 1 > 0$.

(c) (Series hipergeométricas) Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2, \ldots\}$ con $\alpha + \beta - \gamma \neq 1$. Determinar todos los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha+i)\prod_{i=0}^{n-1}(\beta+i)}{\prod_{i=0}^{n-1}(\gamma+i)} \frac{x^n}{n!}$ es convergente.
Sugerencia: Para estudiar la convergencia en $x = -1$, separar en los casos $\alpha + \beta - \gamma > 1$ y $\alpha + \beta - \gamma < 1$.

$*$27. (Irracionalidad de e) El objetivo de este ejercicio es probar que e es irracional.

(a) Probar que $|e^{-1} - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}| \leq \frac{1}{(n+1)!}$.

(b) Probar que e^{-1} no es racional. Deducir que e no es racional.
Sugerencia: Si $e^{-1} = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{N}$, usar (b) para probar que

$$0 < \left| b! \left(e^{-1} - \sum_{i=0}^{b} \frac{(-1)^i}{i!} \right) \right| < 1.$$

$*$ 28. Sea $\xi \in \mathbb{R}_{>0}$.

(a) Probar que existe un subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n\in A} \frac{1}{n} = \xi$.
Sugerencia: Construir A de manera recursiva, de manera que $k \in A$ si

$$\left(\sum_{n\in A} \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{k} < r.$$

(b) (Fracciones egipcias) Supongamos que $\xi \in \mathbb{Q}_{>0}$. Probar que existe un subconjunto finito $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\xi = \sum_{n\in A} \frac{1}{n}$. Hallar A para $\xi = \frac{2}{5}$.
Sugerencia: Primero suponer que $\xi = \frac{p}{q} < 1$ y proceder por inducción en p. Elegir n de manera que $\frac{1}{n} \leq \frac{p}{q} < \frac{1}{n-1}$ y estudiar $\frac{p}{q} - \frac{1}{n}$. Si $\xi \geq 1$, elegir N de manera que $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq r < \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n}$.

$*$ 29. El objetivo de este ejercicio es estudiar la convergencia de algunas subsumas de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$.

(a) Sea B el conjunto de todos los enteros positivos cuya representación decimal no contiene el dígito i. Probar que $\sum_{n\in B} \frac{1}{n}$ es convergente.

(b) Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los primos positivos. Probar que $\sum_{n\in\mathcal{P}} \frac{1}{n}$ divergente.
Sugerencia: Usar el ejercicio 6 y la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \leq \prod_{p\in\mathcal{P}:p\leq n} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}.$$

$*$ 30. (Re-ordenamientos) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie condicionalmente convergente.

(a) Probar que tanto los términos positivos como negativos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ son series divergentes.

(b) Probar que para todo $\xi \in \mathbb{R}$, existe un re-ordenamiento de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para la cual converje a ξ. Además, probar que existen un re-ordenamientos de la serie que divergen a ∞ y $-\infty$ respectivamente.

(c) Denotemos $H_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ y $A_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$. Probar que $A_{2n} = H_{2n} - H_n$.

(d) Si $(r_n)_n$ es la sucesión del ejercicio 6, probar que $A_{2n} = \log(2) + (r_{2n} - r_n) - \frac{1}{2n}$. Concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log(2)$.

(e) Consideremos el reordenamiento de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ que consiste en sumar primero p términos positivos, luego q términos negativos, luego p términos positivos, luego q términos negativos, etc. donde los términos positivos (resp. negativos) permanecen en el mismo orden relativo. Sea S_n la n-ésima suma parcial de este reordenamiento. Probar que $S_{(p+q)n} = H_{2pn} - \frac{1}{2}H_{pn} - \frac{1}{2}H_{qn}$. Concluir que este re-ordenamiento converge a $\log(2) + \frac{1}{2}(\log(p) - \log(q))$.