Práctica 1: Números reales y sucesiones

1. A partir de los axiomas de cuerpo demostrar las siguientes propiedades para cualesquiera a, b, c y d en $\mathbb{R}$:

   a) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

   b) Si $ab = ac$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$.

   c) Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

   d) $(-a)b = -(ab)$ y $(-a)(-b) = ab$.

   e) $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

2. A partir de los axiomas de cuerpo ordenado probar las siguientes propiedades para cualesquiera a, b y c en $\mathbb{R}$:

   a) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

   b) Si $a < b$ entonces $-b < -a$.

   c) Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$.

   d) Si $ab > 0$ entonces a y b son ambos positivos o ambos negativos.

   e) Si $a^2 + b^2 = 0$, entonces se tiene que $a = b = 0$.

   f) Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

3. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente. Probar que son equivalentes las siguientes definiciones alternativas del supremo de A.

   a) $s \in \mathbb{R}$ verifica que:

      1) Para todo $a \in A$, se tiene $s \geq a$;
      2) si $t \geq a$ para todo $a \in A$, entonces $t \geq s$.

   b) $s \in \mathbb{R}$ verifica que:

      1) Para todo $a \in A$, se tiene $s \geq a$;
      2) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $s - \varepsilon < a_\varepsilon$.

   c) $s \in \mathbb{R}$ verifica que:

      1) Para todo $a \in A$, se tiene $s \geq a$;
      2) existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en A tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$.

   Enunciar equivalencias análogas para el ínfimo.

4. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos, tales que $A \subseteq B$.

a) Suponiendo que A y B están acotados superior e inferiormente, enunciar y demostrar las relaciones de orden entre los números $\sup(A)$, $\text{ínf}(A)$, $\sup(B)$, $\text{ínf}(B)$.

b) ¿Qué sucede cuando A o B no está acotado superior o inferiormente?

5. Hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

   a) $A_1 = (a, b]$.

   b) $A_2 = \left\{ \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

   c) $A_3 = A_2 \cup \{0\}$.

   d) $A_4 = \left\{ x \in \mathbb{Q}\ : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \right\}$.

   e) $A_5 = \left\{ x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R} \right\}$.

   f) $A_6 = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$.

   g) $A_7 = \left\{ x^2 - 5x + 4 : x \in [2, 4) \right\}$.

6. Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío se definen, para cada $c \in \mathbb{R}$, $c \cdot A = \{c.x : x \in A\}$ y $-A = (-1) \cdot A$.

   a) Probar que si A está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente y vale $\text{ínf}(-A) = -\sup A$.

   b) Probar que si $c > 0$ y A está acotado superiormente, entonces $c.A$ también lo está y $\sup(c \cdot A) = c \sup A$.

   c) ¿Qué se puede decir en el caso que $c < 0$?

   d) Enunciar resultados análogos a los anteriores para $\text{ínf}(c \cdot A)$ (y demuestre alguno(s) si tiene ganas).

7. Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ambos no vacíos se definen

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$
$$A \cdot B := \{ab : a \in A, b \in B\}$$

   a) ¿Qué condiciones deben verificar A y B para que exista $\sup(A + B)$? Estudiar la relación entre $\sup(A + B)$ y $\sup(A) + \sup(B)$.

   b) ¿Es posible dar resultados parecidos a los de la parte (a) para $A \cdot B$ y los números $\sup(A \cdot B)$ y $\sup(A) \cdot \sup(B)$? ¿Cuáles?

8. Si x es un número real arbitrario, probar que existe un único entero n tal que $n \leq x < n + 1$. Este n se denomina la *parte entera* de x y se designa por $\lfloor x \rfloor$.

9. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$.

   a) Probar que

1) Si $r < L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r$ para todo $n \geq n_0$.

2) Si $r > L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < r$ para todo $n \geq n_0$.

b) ¿Puede reformularse el primer ítem de (a) si se sabe que $r \leq L$?

c) ¿Qué puede decirse de L si se sabe que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r$ para todo $n \geq n_0$?

10. Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ estrictamente decreciente tal que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$.

11. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.

12. Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión definida inductivamente por $b_1 = \sqrt{2}$ y $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$, para todo $n \geq 1$. Probar que tal sucesión es monótona y acotada y que $b_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

13. Sean $x_1 > y_1 > 0$ dos números reales positivos. Para $n \geq 1$, definimos inductivamente los términos de dos sucesiones de la siguiente manera: $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$. Mostrar que $y_n < y_{n+1} < x_1$, que $y_1 < x_{n+1} < x_n$ y que además $0 < x_{n+1} - y_{n+1} \leq \frac{x_1 - y_1}{2^n}$. Deducir entonces que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

14. Hallar los puntos límites de las sucesiones:

(a) $1 - \dfrac{1}{n}$ (b) $(-1)^n$ (c) $\cos(\dfrac{n\pi}{2})$

(d) $(-1)^n(2 + \dfrac{3}{n})$ (e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \ldots$ (f) $\dfrac{n + (-1)^n(2n+1)}{n}$

15. Hallar los límites superior e inferior de las sucesiones del ejercicio anterior.

16. Se tienen sucesiones acotadas de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Enunciar y demostrar las relaciones de orden entre los cuatro números que siguen:

- $\liminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$
- $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$
- $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$.

17. *a*) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de números reales positivos que verifica que $\limsup\limits_{n\to\infty}(\frac{a_{n+1}}{a_n}) = \theta < 1$. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Usar el ítem anterior para probar que

1) Si $\alpha > 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{\alpha^n}{n!}) = 0$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n!}{n^n}) = 0$.

3) Si $0 < \alpha < 1$ y k es un entero, entonces $\lim_{n\to\infty} n^k\alpha^n = 0$.

18. Si $a_n > 0$ probar que

$$\liminf_n a_{n+1}/a_n \leq \liminf_n \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_n a_{n+1}/a_n.$$

¿Puede ocurrir que las desigualdades sean estrictas?

19. Estudiar la convergencia de las sucesiones $a_n = n^{\frac{1}{n}}$ y $b_n = (\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$ cuando $n \to \infty$.

20. Sean $x_1 > 0$ y $a > x_1^2 + x_1$ dos números reales. Definimos inductivamente los términos de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $x_{n+1} = \frac{a}{1+x_n}$. Probar que los intervalos $[x_1, x_2], [x_3, x_4], \ldots$ forman un encaje de intervalos, y que el único punto ξ común a todos ellos es una raíz de $x^2 + x = a$.
Sugerencia. Mostrar que $x_{n+1} - x_n$ y $x_n - x_{n-1}$ tienen diferentes signos y que $|x_{n+1} - x_n| \leq \theta |x_n - x_{n-1}|$ para algún $\theta < 1$.

21. Sean $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos cerrados y λ_n la longitud de I_n. Supongamos que $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$. Mostrar que:

- Existe el límite $\lim_{n\to\infty} \lambda_n$.
- Si $\lim_{n\to\infty} \lambda_n > 0$ entonces $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ es un intervalo cerrado de longitud $\lim_{n\to\infty} \lambda_n$.

22. Probar que un número $M \in \mathbb{R}$ es el límite superior de una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada superiormente si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, se cumplen las siguientes dos propiedades:

a) Existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ para los que $a_n > M - \varepsilon$;

b) Existe solamente una cantidad finita de $n \in \mathbb{N}$ para los que $a_n > M + \varepsilon$.

23. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de las medias aritméticas (promedios) definida por

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

a) Decidir si las siguientes implicaciones son verdaderas o falsas:

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

2) $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Deducir del primer ítem de (a) que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales que converge a L entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = L$.

c) ¿Puede suceder que $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ mientras que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$?

d) Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por $b_n = a_{n+1} - a_n$. Demostrar que si $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = L$ y $\lim_{n\to\infty} nb_n = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.
Sugerencia. Verificar que

$$a_n - \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} kb_k.$$

24. Probar que los siguientes enunciados sobre $\mathbb{R}$ son equivalentes:

- (Axioma de supremo) Todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío admite un supremo $s \in \mathbb{R}$.
- (Propiedad de convergencia monótona) Toda sucesión $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ decreciente y acotada converge a un $x \in \mathbb{R}$.
- (Encaje de intervalos) Toda familia de intervalos cerrados $I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, con $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$ cumple que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (Bolzano-Weierstrass) Toda sucesión $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ acotada tiene un punto límite $x \in \mathbb{R}$.
- (Criterio de Cauchy) Toda sucesión $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ de Cauchy converge a un $x \in \mathbb{R}$.

25. Probar que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ si y sólo si toda subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ que converge a x cuando $j \to \infty$.

26. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión.

   a) Denotemos $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión dada por $s_n := \sum_{k=1}^{n} |x_{k+1} - x_k|$. Probar que, si $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$.

   b) Supongamos que $|x_{n+1} - x_n| < 2^{-n}$ para todo $n \geq 1$. Probar que $(x_n)_n$ es convergente.

   c) Supongamos que $|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$. ¿Es cierto que $(x_n)_n$ es convergente?

$*$27. Dado $x \in \mathbb{R}$, denotaremos $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$.

   a) (Lema de Dirichlet) Sea $\xi \in \mathbb{R}$ y sea $Q > 0$ un entero positivo. Entonces existen $p, q \in \mathbb{Z}$, coprimos, tales que

$$0 < q \leq Q, \ \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q(Q+1)}$$

   Sugerencia: Considerar los $Q+1$ números $0, \{\xi\}, \dots, \{Q\xi\}$ distribuidos en los $Q+1$ intervalos $[\frac{i}{Q+1}, \frac{i+1}{Q+1})$, $i = 0, 1, \dots, Q$.

   b) Sea $\xi \in \mathbb{R}$. Probar que $\xi \in \mathbb{Q}$ si y sólo el conjunto

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p \text{ y } q \text{ son coprimos y } \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2} \right\}$$

   es finito.

   c) (Lema de Kronecker) Sea $\xi \notin \mathbb{Q}$. Probar que dado $v \in [0,1]$, la sucesión $(\{n\xi\})_n$ admite una subsucesión convergente a v.

   Sugerencia: Sea $\varepsilon > 0$. Usar el ítem (a) para concluir que existen enteros n_1, p tales que $|n_1\xi - p| < \varepsilon$. Luego considerar la sucesión $\{n_1 u\}, \{2n_1 u\}, \{3n_1 u\}, \dots$.

   d) Usando el ítem anterior y el hecho que π es irracional, probar que para todo $v \in [-1,1]$ la sucesión $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente a v.

   e) Calcular el límite superior y el límite inferior de la sucesión $(|\cos(n)|^{\cos(n)})_n$.