

CAPÍTULO 4

Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales

4.1. Problemas de valores iniciales. En este capítulo vamos a estudiar métodos de resolución de ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones y sistemas diferenciales aparecen en casi todas las áreas de la física. El tema es muy amplio y cubre muchísimas técnicas de la física-matemática. Nos restringiremos a ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir estudiaremos aquellos sistemas cuyo estado se describe por una función (escalar o vectorial) que depende de una sola variable, que en general podemos pensar que es el tiempo. Concretamente, $x(t)$ representa uno o varios números que determinan el estado del sistema bajo estudio en el instante t . Dentro de esta clase de problemas, solo consideraremos el problema de valores iniciales:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

donde $f(t, x)$ es una función suave en ambas variables. Sabemos que este problema tiene solución única definida en algún intervalo que contiene a t_0 . Además, depende en forma continua de los datos iniciales (t_0, x_0) .

A continuación damos algunos ejemplos de problemas escalares ($x(t) \in \mathbb{R}$) de valores iniciales, relacionados con distintas aplicaciones.

4.1.1. Crecimiento poblacional. Los modelos clásicos de crecimiento del número de individuos de una especie son:

- I. Crecimiento exponencial (Malthus 1798): $\dot{N} = rN$.
- II. Crecimiento logístico (Verhulst, 1838): $\dot{N} = r(1 - N/K)N$.

En el primer caso la solución es $N(t) = N_0 e^{rt}$, el segundo tiene como respuesta:

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}.$$

Sin embargo, modelos más generales de la forma $\dot{N} = g(N)N$ fueron planteados en diferentes situaciones. Por ejemplo, un modelo usado para describir el crecimiento de tumores se basa en la ley de Gompertz.

4.1.2. Circuitos R-C y R-L. Se denomina circuito R-C a un circuito eléctrico compuesto de varios resistores y capacitores interconectados. El más simple de los circuitos R-C consiste de un sólo resistor y un capacitor, como se muestra en la Figura 4.2(a). Si el capacitor tiene carga inicialmente, al estar conectado al resistor, circulará una corriente eléctrica a través del circuito. Las placas del capacitor perderán su carga y la energía eléctrica se transformará en calor (ley de Joule). La ley de Ohm establece que la intensidad de la corriente i que circula

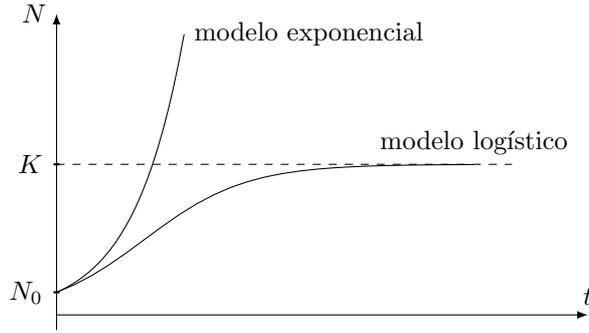


Fig. 4.1: Crecimiento de la población

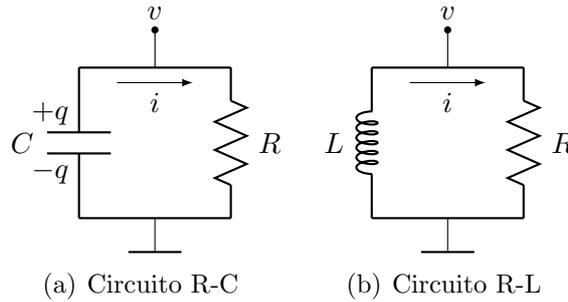


Fig. 4.2: Circuitos R-C y R-L simples.

por un resistor es proporcional a la diferencia de potencial v aplicada en sus extremos, es decir $v = Ri$, siendo R su resistencia. Por otro lado, sabemos que la relación entre la carga almacenada en un capacitor es proporcional a la diferencia de potencial entre sus conductores, $q = Cv$. Por conservación de la carga, y asumiendo que la carga sólo se acumula en el capacitor, tenemos $i = -\dot{q} = -C\dot{v}$, de donde se deduce $RC\dot{v} + v = 0$. Si el potencial en el tiempo t_0 es v_0 , la evolución en el tiempo del potencial eléctrico está dado por $v(t) = v_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$, donde $\tau = RC$. Observemos que si la resistencia R se mide en Ω (ohmios) y la capacidad C en F (faradios), τ se mide en s (segundos). La ecuación diferencial de v refleja la conservación de la energía. En efecto, la energía eléctrica acumulada en el capacitor está dada por $\mathcal{E}_{\text{elec}} = qv/2 = Cv^2/2$, por lo tanto la variación en el tiempo de dicha energía vale $\dot{\mathcal{E}}_{\text{elec}} = Cv\dot{v}$. Por otro lado, la ley de Joule establece que la energía transformada en calor por unidad de tiempo, está dada por $\dot{\mathcal{E}}_{\text{cal}} = iv = v^2/R$. Vale entonces

$$\dot{\mathcal{E}}_{\text{elec}} + \dot{\mathcal{E}}_{\text{cal}} = Cv\dot{v} + \frac{v^2}{R} = 0.$$

Analizamos ahora el circuito presentado en la Figura 4.2(b), formado por un resistor y un inductor. Igual que en el caso anterior, de la ley de Ohm obtenemos $v = Ri$. La ley de Faraday establece la relación entre la corriente que circula por el inductor y la diferencia de potencial entre sus extremos, $v = -Ldi/dt$, donde L es el coeficiente de autoinducción.

De ambas relaciones, obtenemos la ecuación diferencial $\dot{v} + R/Lv = 0$, cuya solución es similar a la del caso anterior, con $\tau = L/R$. Si el valor resistencia R está dado en Ω y el de la inductancia L en H (henrios), τ queda expresado en s.

4.1.3. Caída libre. Se denomina caída libre al movimiento de un cuerpo bajo la acción de un campo gravitatorio. Si se considera la fuerza de rozamiento fluidodinámico, la ecuación de movimiento se puede escribir en términos la altura z :

$$m\dot{v} = -mg + f_r,$$

donde g es la aceleración de la gravedad y f_r es la fuerza de rozamiento que depende de v . Para velocidades altas (régimen turbulento), f_r está dada por

$$f_r = \frac{1}{2}C_d\rho Av^2,$$

donde C_d es el coeficiente aerodinámico de resistencia al avance, ρ la densidad del fluido y A es el área transversal a la dirección del movimiento. Si definimos $\gamma = 1/2C_d\rho A$, la ecuación diferencial para v es $\dot{v} = -g + \gamma/mv^2$. Si suponemos que el cuerpo inicialmente se encuentra en reposo, $v(0) = 0$, la solución está dada por $v(t) = -g\tau \tanh(t/\tau)$, con $\tau = \sqrt{m/(g\gamma)}$. Vemos que, a diferencia de lo que ocurre cuando no hay rozamiento, la velocidad se estabiliza en un valor final $v_\infty = g\tau$. Para más detalles, ver el Ejercicio 4.11.

4.2. Método de Euler. En algunos problemas, como los ejemplos anteriores, se pueden obtener soluciones analíticas. Sin embargo, esto es raro y en la mayoría de los problemas solo podemos obtener soluciones aproximadas por medio de métodos numéricos. Inicialmente, vamos a considerar el caso escalar, es decir $x(t) \in \mathbb{R}$, la extensión al caso vectorial (o a ecuaciones de mayor orden) es inmediata. Resolveremos los problemas de valores iniciales hacia el futuro, $t \in [t_0, t_0 + T]$ (con $T > 0$). Esto no representa ninguna restricción, siendo que (4.1) es un problema reversible. En efecto, si resolvemos

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = -f(-t, \tilde{x}(t)), \\ \tilde{x}(-t_0) = x_0, \end{cases}$$

en $[-t_0, -t_0 + T]$, entonces $x(t) = \tilde{x}(-t)$ es la solución del problema (4.1) en $[t_0 - T, t_0]$.

El más sencillo de los métodos de integración numérica se conoce el método de Euler explícito. Básicamente consiste en aproximar la solución mediante la recta tangente que pasa por el punto (t_0, x_0) dada por

$$x = x(t_0) + \dot{x}(t_0)(t - t_0) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0).$$

En el tiempo $t_1 = t_0 + h_0$ obtenemos $x_1 = x_0 + h_0f(t_0, x_0)$. Repitiendo la operación a partir del punto (t_1, x_1) , obtenemos un nuevo punto $x_2 = x_1 + h_1f(t_1, x_1)$, correspondiente al tiempo $t_2 = t_1 + h_1$ (ver Figura 4.4). Concretamente, planteamos la sucesión de puntos (t_n, x_n) definida por

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + h_{n-1}, \\ x_n &= x_{n-1} + h_{n-1}f(t_{n-1}, x_{n-1}), \end{aligned}$$

donde h_n son valores arbitrarios (pequeños). Como la recta tangente es una aproximación de la función para pequeños incrementos en la variable independiente, $x_1 \cong x(t_1)$, siendo $x(t)$ es la solución exacta. A partir del segundo paso, el punto inicial no coincide con el verdadero. Sin embargo, por la continuidad de las soluciones con respecto a los datos iniciales, $x_n \cong x(t_n)$. En general vamos a tomar $h_n = h$ y por lo tanto $t_n = t_0 + nh$.

Ejemplo 4.1. Para ilustrar el método de Euler explícito, vamos a estudiar el problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t), \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

en el intervalo $[0, 1]$, como conocemos la solución exacta, $x(t) = e^t$, podemos obtener los errores obtenidos con el método numérico para diferentes pasos temporales h . Observemos que para

t	$x(t)$	$x_n (h = 0.1)$	Error	$x_n (h = 0.01)$	Error
0.1	1.105	$x_1 = 1.100$	5.17×10^{-3}	$x_{10} = 1.105$	5.49×10^{-4}
0.2	1.221	$x_2 = 1.210$	1.14×10^{-2}	$x_{20} = 1.220$	1.21×10^{-3}
0.3	1.350	$x_3 = 1.331$	1.89×10^{-2}	$x_{30} = 1.348$	2.01×10^{-3}
0.4	1.492	$x_4 = 1.464$	2.77×10^{-2}	$x_{40} = 1.489$	2.96×10^{-3}
0.5	1.649	$x_5 = 1.611$	3.82×10^{-2}	$x_{50} = 1.645$	4.09×10^{-3}
0.6	1.822	$x_6 = 1.772$	5.06×10^{-2}	$x_{60} = 1.817$	5.42×10^{-3}
0.7	2.014	$x_7 = 1.949$	6.50×10^{-2}	$x_{70} = 2.007$	6.99×10^{-3}
0.8	2.226	$x_8 = 2.144$	8.20×10^{-2}	$x_{80} = 2.217$	8.83×10^{-3}
0.9	2.460	$x_9 = 2.358$	1.02×10^{-1}	$x_{90} = 2.449$	1.10×10^{-2}
1.0	2.718	$x_{10} = 2.594$	1.25×10^{-1}	$x_{100} = 2.705$	1.35×10^{-2}

Tabla 4.1: Error en $t = 0.1, 0.2, \dots, 1$ para $h = 0.1$ y $h = 0.01$.

dos discretizaciones distintas, la solución en un instante t se alcanza en elementos diferentes de la sucesión x_n . En efecto, si para los pasos $h, \tilde{h} > 0$ tenemos las soluciones aproximadas x_n, \tilde{x}_n , tendremos que $x(t) \cong x_n$ y $x(t) \cong \tilde{x}_{\tilde{n}}$, donde $t = nh = \tilde{n}\tilde{h}$. En la Tabla 4.1 se muestran los errores $E_n = |x(nh) - x_n|$ para $h = 0.1, 0.01$. En la Figura 4.3 graficamos los errores para $h = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ en un sistema de coordenadas semi-logarítmico. Podemos observar que los gráficos son asintóticos a rectas, lo que refleja el comportamiento exponencial de los errores. Esto coincide con el análisis del error que haremos más adelante.

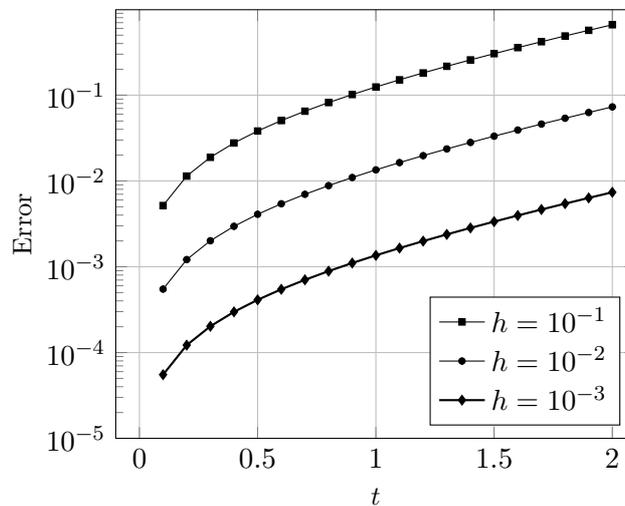


Fig. 4.3: Error del método de Euler para la ecuación $\dot{x}(t) = x(t)$.

El método anterior se describe en el código mostrado en el Algoritmo 4.1, los datos son: tiempo inicial t_0 , el valor inicial x_0 , el tiempo de integración T , el paso h temporal y la función que representa la ecuación diferencial f . La salida es una lista de tiempos t_list y otra de los estados correspondientes x_list .

Algoritmo 4.1: Método de Euler explícito.**Data:** f, t_0, T, h, x_0 **Result:** t_list, x_list $n = 0;$ $t_list(0) = t_0;$ $x_list(0) = x_0;$ **while** $t_list(n) - t_0 < T$ **do** $n = n + 1;$ $t_list(n) = t(n - 1) + h;$ $x_list(n) = x_list(n - 1) + hf(t_list(n - 1), x_list(n - 1));$ **end**

▣ **Ejercicio 4.4.** Escribir un programa que implemente el método de Euler explícito descrito en el Algoritmo 4.1 para resolver el problema (4.1).

4.2.1. Error de truncamiento del método de Euler. Vamos a acotar el error que se comete al aproximar la solución exacta usando el método de Euler. Aclaremos que por *acotar* entendemos obtener una estimación pesimista del error, es decir que vamos a suponer que todas las cantidades no conocidas toman los valores que maximizan el error. Más adelante proponemos métodos de análisis del error más precisos, los cuales permiten optimizar los parámetros del método (el paso temporal h en este caso) para lograr integradores eficientes sin superar el error tolerado.

El análisis del error se basa en calcular el número de términos del desarrollo de Taylor de la solución aproximada que coinciden con los de la solución exacta. Si la coincidencia es hasta el término n -ésimo, decimos que el método es de orden n . En el caso del método de Euler, tenemos

$$x(t_1) = x(t_0) + h\dot{x}(t_0) + \frac{h^2}{2}\ddot{x}(\tau_1).$$

Como $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, tenemos

$$\ddot{x}(t) = f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t))\dot{x}(t) = f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t))f(t, x(t)),$$

de donde obtenemos

$$x(t_1) = x_0 + hf(t_0, x_0) + \frac{h^2}{2}(f_t(\tau_1, x(\tau_1)) + f_x(\tau_1, x(\tau_1))f(\tau_1, x(\tau_1))).$$

Como $x_1 = x(t_0) + hf(t_0, x_0)$, obtenemos

$$\epsilon_1 = x(t_1) - x_1 = \frac{h^2}{2}(f_t(\tau_1, x(\tau_1)) + f_x(\tau_1, x(\tau_1))f(\tau_1, x(\tau_1))) = O(h^2).$$

La cantidad ϵ_1 se denomina error local de truncamiento.

4.2.2. Error global. Como vemos en el gráfico de la Figura 4.4, a partir del segundo paso, la diferencia entre la solución exacta y la aproximada no se debe solo al error de truncamiento local. Como partimos del punto (t_1, x_1) , que difiere del punto de la solución exacta $(t_1, x(t_1))$, se suma el error del paso anterior.. Queremos estudiar la acumulación de errores en cada paso, lo haremos para el método de Euler pero se aplica a todos los métodos propuestos. Definimos como error global en el paso n -ésimo a $E_n = |x(t_n) - x_n|$. Vamos a calcular una cota para E_2 y luego extenderemos el análisis al caso general. Repitiendo los argumentos utilizados anteriormente, vemos que el error local de truncamiento $\epsilon_2 = x(t_2) - \tilde{x}_2$, con $\tilde{x}_2 = x(t_1) + hf(t_1, x(t_1))$. El error

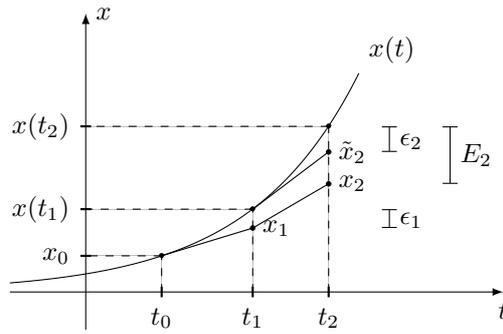


Fig. 4.4: Errores locales y globales.

en tiempo t_2 está definido como $E_2 = |x(t_2) - x_2|$, que a diferencia de lo que sucede en t_1 , no es ϵ_2 como vemos en la figura 4.4. Para calcular E_2 podemos escribir

$$E_2 \leq |x(t_2) - \tilde{x}_2| + |\tilde{x}_2 - x_2| = |\epsilon_2| + |\tilde{x}_2 - x_2|.$$

Para estimar el segundo término escribimos

$$\begin{aligned} |\tilde{x}_2 - x_2| &= |x(t_1) - x_1 + h(f(t_1, x(t_1)) - f(t_1, x_1))| \\ &\leq |x(t_1) - x_1| + h |f(t_1, x(t_1)) - f(t_1, x_1)|. \end{aligned}$$

Si suponemos que $|f(t_1, x(t_1)) - f(t_1, x_1)| \leq L|x(t_1) - x_1| = L|\epsilon_1|$, entonces

$$E_2 \leq |\epsilon_2| + (1 + Lh)|\epsilon_1|.$$

En general, vemos que $E_n \leq |\epsilon_n| + (1 + Lh)E_{n-1}$, e inductivamente podemos ver que

$$E_n \leq |\epsilon_n| + (1 + Lh)|\epsilon_{n-1}| + \cdots + (1 + Lh)^{n-1}|\epsilon_1|.$$

Si definimos $\epsilon_{\max} = \max\{|\epsilon_1|, \dots, |\epsilon_n|\}$, resulta

$$E_n \leq (1 + (1 + Lh) + \cdots + (1 + Lh)^{n-1})\epsilon_{\max}.$$

De la expresión de la serie geométrica y usando que $1 + Lh \leq e^{Lh}$, tenemos

$$E_n \leq \frac{(1 + Lh)^n - 1}{Lh} \epsilon_{\max} \leq \frac{e^{Lnh} - 1}{Lh} \epsilon_{\max}.$$

Como $nh \leq T$, obtenemos

$$E_n \leq \frac{e^{LT} - 1}{L} \frac{\epsilon_{\max}}{h}.$$

Falta ver la condición que impusimos sobre $f(t, x)$. Por el teorema del valor medio (o de Lagrange) vemos que $f(t_1, x(t_1)) - f(t_1, x_1) = f_x(t_1, \xi)$, para algún punto ξ en el intervalo determinado por x_1 y $x(t_1)$. Por lo tanto, si $|f_x(t, x)| \leq L$, la hipótesis se verifica. En general no podemos suponer la acotación de $f_x(t, x)$ en todo el dominio, pero tampoco es necesario. Si tomamos un rectángulo $Q = [t_0, t_0 + T] \times [\xi_1, \xi_2]$ suficientemente grande para que la solución $(t, x(t))$ permanezca en Q , podemos usar la constante $L = \max\{|f_x(t, x)| : (t, x) \in Q\}$ (ver Figura 4.5). Para h pequeño, tendremos $(t_n, x_n) \in Q$ lo que termina con el argumento.

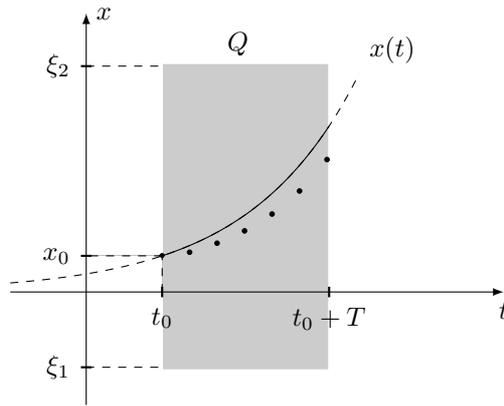


Fig. 4.5: En gris, el rectángulo Q que contiene a $(t, x(t))$. Los puntos indican la solución aproximada (t_n, x_n) .

4.2.3. Estimación del error. En 4.2.1, obtuvimos cotas de error de truncamiento con constantes que dependen de la solución exacta y estimaciones de las derivadas de $f(t, x)$, lo que vuelve difícil de estimar con precisión. Con el objetivo de mantener el error dentro de valores aceptables, buscamos fórmulas que nos permitan calcularlo con buen grado de aproximación. Como definimos en 4.2.1, el error local de truncamiento ϵ_1 es la diferencia entre la solución exacta $x(t_1)$ y x_1 . El error con paso h está dado por

$$\epsilon_1 = x(t_1) - x_1 = C_2 h^2 + O(h^3),$$

Sin en lugar de considerar un paso de tamaño h , consideramos dos pasos de tamaño $h/2$ obtenemos

$$\tilde{\epsilon}_1 = x(t_1) - \tilde{x}_1 = \frac{1}{2} C_2 h^2 + O(h^3),$$

restando las estimaciones tenemos $\tilde{x}_1 - x_1 = 1/2 C_2 h^2 + O(h^3)$, de donde podemos despejar

$$\epsilon_1 = 2(\tilde{x}_1 - x_1) + O(h^3).$$

En 4.2.1 definimos ϵ_n como la diferencia entre el valor de la solución exacta que pasa por (t_0, x_0) en el tiempo $t = t_n$, y la solución obtenida con el método desde el punto $(t_{n-1}, x(t_{n-1}))$ (Figura 4.4). Ahora, hemos considerado la diferencia entre el valor de la solución exacta que pasa por (t_{n-1}, x_{n-1}) en el tiempo $t = t_n$, que denotamos ξ_n , y la solución numérica x_n . Si suponemos que el error global es pequeño, ambos errores deben ser similares, como se puede apreciar de la comparación de las Figuras 4.4 y 4.6. Analicemos el problema

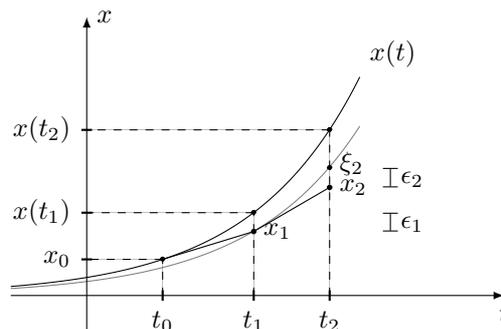


Fig. 4.6: Error local.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = e^{-2t} - 2x(t), \\ x(0) = 0.1, \end{cases}$$

para $t \in [0, 1]$. La solución exacta que pasa por (t_{n-1}, x_{n-1}) está dada por

$$x(t) = (t - t_{n-1})e^{-2t} + e^{-2(t-t_{n-1})}x_{n-1},$$

entonces $\xi_n = he^{-2t_n} + e^{-2h}x_{n-1}$. En la Tabla 4.2 se muestran los valores obtenidos para $t_0 = 0$, $x_0 = 0.1$ y $h = 0.1$. Observemos que las diferencias entre los errores locales de truncamiento y

t	x_n	ξ_n	\tilde{x}_n	ϵ_n	$2(\tilde{x}_n - x_n)$
0.1	0.1800	0.1637	0.1712	-1.625×10^{-2}	-1.752×10^{-2}
0.2	0.2259	0.2144	0.2197	-1.147×10^{-2}	-1.238×10^{-2}
0.3	0.2477	0.2398	0.2434	-7.920×10^{-3}	-8.565×10^{-3}
0.4	0.2531	0.2478	0.2502	-5.308×10^{-3}	-5.756×10^{-3}
0.5	0.2474	0.2440	0.2455	-3.405×10^{-3}	-3.708×10^{-3}
0.6	0.2347	0.2327	0.2336	-2.035×10^{-3}	-2.232×10^{-3}
0.7	0.2179	0.2168	0.2173	-1.064×10^{-3}	-1.184×10^{-3}
0.8	0.1990	0.1986	0.1987	-3.891×10^{-4}	-4.551×10^{-4}
0.9	0.1794	0.1794	0.1794	6.692×10^{-5}	3.895×10^{-5}
1.0	0.1600	0.1604	0.1602	3.632×10^{-4}	3.612×10^{-4}

Tabla 4.2: Error para $h = 0.1$ y la estimación con $h = 0.05$.

las estimaciones son del orden de $h^3 = 0.001$.

Las estimaciones del error permiten implementar métodos adaptativos, estos integradores modifican el paso h para lograr que el error local de truncamiento en cada paso se encuentre cerca de un valor preestablecido. Si fuera mayor, la solución numérica tendría un error superior al deseado. Por el contrario, si fuera mucho menor, se estarían desperdiciando recursos computacionales.

4.2.4. Extrapolación. En el párrafo anterior, mostramos como se puede estimar el error local de truncamiento comparando los resultados que se obtienen aplicando un paso del método de tamaño h y dos pasos con tamaño $h/2$. Podemos, en lugar de estimar el error, reducirlo considerando que $\xi_n = x_n + \epsilon_n$. Proponemos la modificación:

$$\bar{x}_n = x_n + 2(\tilde{x}_n - x_n) = 2\tilde{x}_n - x_n,$$

Explícitamente, tenemos

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + hf(t_{n-1}, x_{n-1}), \\ \tilde{x}_n &= x_{n-1} + h/2f(t_{n-1}, x_{n-1}) + h/2f(t_{n-1} + h/2, x_{n-1} + h/2f(t_{n-1}, x_{n-1})) \end{aligned}$$

de donde obtenemos el método de Euler modificado:

$$\bar{x}_n = x_{n-1} + hf(t_{n-1} + h/2, x_{n-1} + h/2f(t_{n-1}, x_{n-1})).$$

Este método pertenece a la familia de métodos propuestos en el Ejercicio 4.10, cuando $\alpha = 1/2$ y $\beta = 1$.

Ejemplo 4.2. Consideremos el problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) - 3x^2(t), \\ x(0) = 0.01, \end{cases}$$

cuya solución exacta es $x(t) = 0.01e^{3t}/(1 + 0.01(e^{3t} - 1))$. En la Figura 4.7 se muestran las soluciones obtenidas con ambos métodos. Para el método de Euler, tomamos un paso $h = 0.05$, y para el método de Euler modificado elegimos $h = 0.1$. De esta forma, el número de evaluaciones de $f(t, x)$ es el mismo. Como $x(t)$ toma valores muy diferentes ($0.01 \leq x(t) \leq 1$), consideramos el error relativo que se muestra en la Figura 4.7(b), donde vemos la superioridad del método de Euler modificado.

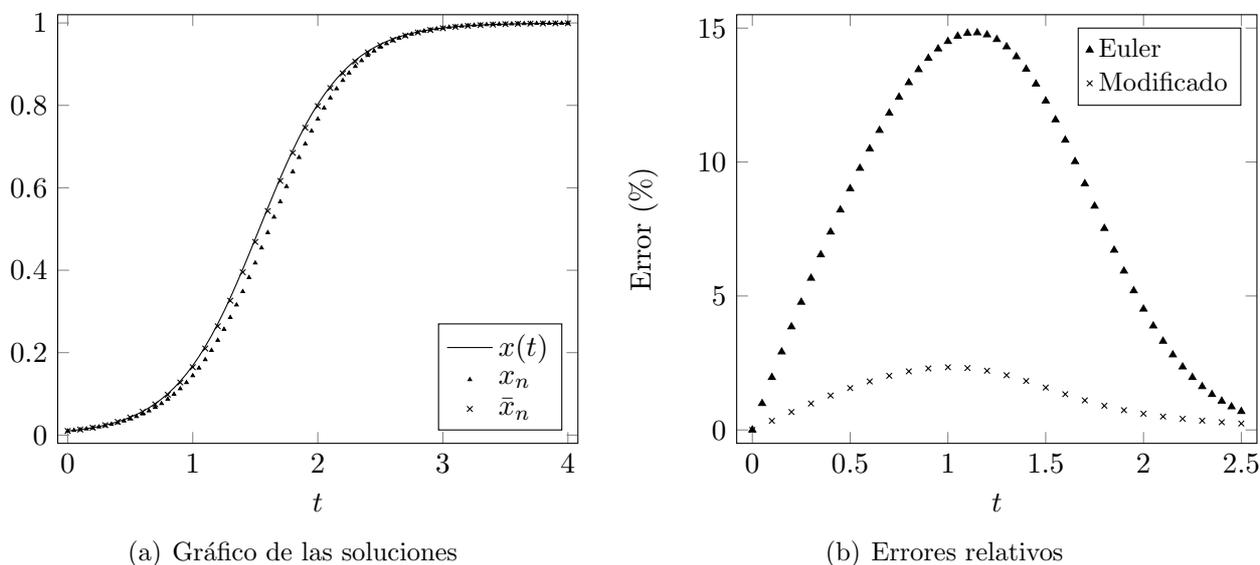


Fig. 4.7: Comparación de los errores de los métodos de Euler y Euler modificado.

4.2.5. Método de Euler implícito.

Consideremos la ecuación $\dot{x}(t) = -\lambda x(t)$

4.3. Métodos de Taylor. En el método de Euler vimos que x_1 era una aproximación de primer orden del verdadero valor $x(t_1)$. Si lográramos que x_1 coincidiera con más términos del desarrollo de Taylor de $x(t)$, el orden del error de truncamiento sería mayor (y por lo tanto el del error global) y tendríamos un método más preciso. Para lograr esto desarrollamos los primeros términos de $x(t_1)$:

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x_0 + h \dot{x}(t_0) + \frac{h^2}{2} \ddot{x}(t_0) + \frac{h^3}{6} \ddot{\ddot{x}}(\tau) \\ &= x_0 + h f(t_0, x_0) + \frac{h^2}{2} (f_t(t_0, x_0) + f_x(t_0, x_0)f(t_0, x_0)) + \frac{h^3}{6} \ddot{\ddot{x}}(\tau). \end{aligned}$$

Si tomamos

$$x_1 = x_0 + h f(t_0, x_0) + \frac{h^2}{2} (f_t(t_0, x_0) + f_x(t_0, x_0)f(t_0, x_0)),$$

obtenemos un método de segundo orden, es decir $\epsilon_n = O(h^3)$, lo que prueba (por un argumento similar al anterior) que el error global es $E_n = O(h^2)$.

 **Ejercicio 4.5.** Plantear el método de Taylor para el problema del Ejemplo 4.1.

 **Ejercicio 4.6.** Escribir un código para la resolución del problema del Ejemplo 4.1 mediante el método dado en el Ejercicio 4.5.

 **Ejercicio 4.7*.** Obtener el método de Taylor de tercer orden.

4.4. Métodos Runge-Kutta. Para implementar el método de Taylor necesitamos evaluar la función $f(t, x)$ y también sus derivadas. Esto presenta varios problemas. Por un lado tenemos que modificar todos los códigos donde se evalúan la función y sus derivadas, es decir que hay que escribir varias rutinas específicas para utilizar el integrador. Más aún, en muchos casos $f(t, x)$ no tiene una expresión analítica, sus evaluaciones son el resultado de cálculos realizados numéricamente. No podemos entonces obtener los valores de sus derivadas. Vamos a presentar en esta sección una familia de métodos de alto orden donde sólo necesitan evaluaciones de la función $f(t, x)$. Consideremos el más simple de estos integradores: tomamos $k_1 = f(t_0, x_0)$ y $k_2 = f(t_0 + h, x_0 + hk_1)$, desarrollando k_2 como función de h

$$k_2 = f(t_0, x_0) + h(f_t(t_0, x_0) + f_x(t_0, x_0)f(t_0, x_0)) + O(h^2),$$

si definimos $x_1 = x_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$, vemos que

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) + \frac{h^2}{2}(f_t(t_0, x_0) + f_x(t_0, x_0)f(t_0, x_0)) + O(h^3),$$

$$x(t_1) = x_0 + hf(t_0, x_0) + \frac{h^2}{2}(f_t(t_0, x_0) + f_x(t_0, x_0)f(t_0, x_0)) + O(h^3),$$

restando ambas expresiones obtenemos $\epsilon_1 = x(t_1) - x_1 = O(h^3)$.

Describamos los pasos correspondiente al método en el Algoritmo 4.2.

Algoritmo 4.2: Método Runge-Kutta de orden 2.

Data: f, t_0, T, h, x_0

Result: t_list, x_list

$n = 0;$

$t_list(0) = t_0;$

$x_list(0) = x_0;$

while $t(n) - t_0 < T$ **do**

$n = n + 1;$

$t_list(n) = t_list(n - 1) + h;$

$k_1 = f(t_list(n - 1), x_list(n - 1));$

$k_2 = f(t_list(n), x_list(n - 1) + h * k_1);$

$x_list(n) = x_list(n - 1) + h * (k_1 + k_2)/2;$

end

De la misma forma, podemos mostrar que el método que se obtiene calculando

$$k_1 = f(t_0, x_0),$$

$$k_2 = f(t_0 + h/2, x_0 + hk_1/2),$$

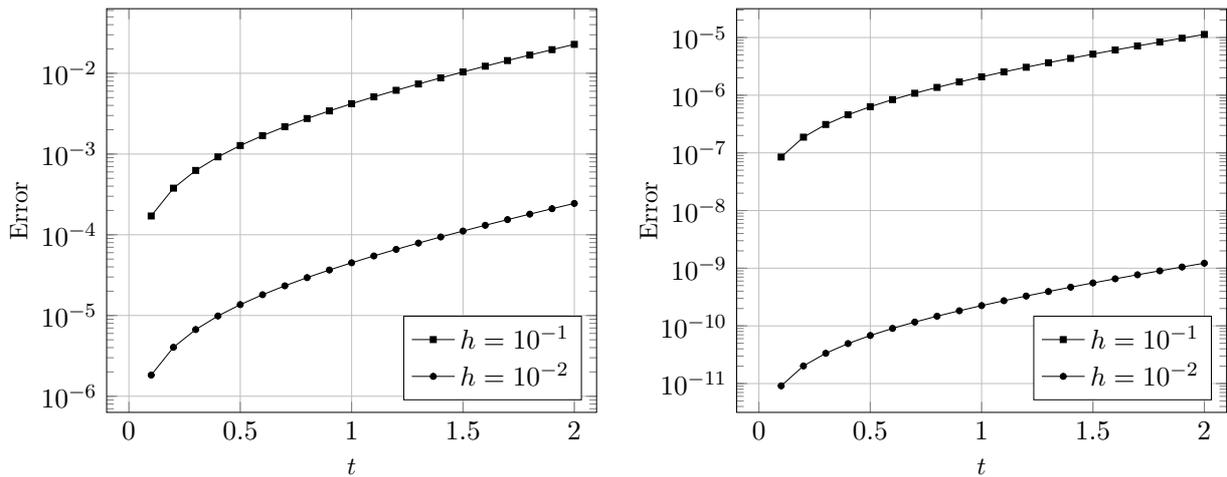
$$k_3 = f(t_0 + h/2, x_0 + hk_2/2),$$

$$k_4 = f(t_0 + h, x_0 + hk_3),$$

y tomando $x_1 = x_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ es un método de cuarto orden. Consideramos nuevamente el problema del Ejemplo 4.1. En la Figura 4.8 graficamos los errores en función del tiempo, para los métodos Runge-Kutta estudiados con dos pasos temporales distintos: $h = 0.1, 0.01$.

▣ **Ejercicio 4.13.** Escribir un programa que implemente el método de Runge-Kutta de segundo y cuarto orden para resolver ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$



(a) Runge-Kutta de segundo orden.

(b) Runge-Kutta de cuarto orden.

Fig. 4.8: Errores de los métodos de Runge-Kutta para $\dot{x} = x$, $x(0) = 1$, $t \in [0, 2]$.

tomando como parámetros la función f , los tiempos inicial t_0 , el intervalo de integración T , el paso h y el dato inicial x_0 ; y arrojando como resultados las listas $t.list = (t_0 \dots t_N)$ y $x.list = (x_0 \dots x_N)$. Utilizar este método para resolver nuevamente el Ejercicio 4.17. Comparar la solución con la obtenida con el método de Euler.

4.5. Problemas en dimensión mayor. Sabemos que existen muchos ejemplos de problemas donde se necesita más de una variable para describir el estado del sistema. La evolución se expresa por (4.1), pero interpretando esta ecuación en forma vectorial, es decir

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

donde $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_d(t)) \in \mathbb{R}^d$ representa el estado del sistema en el instante t , $f(t, \mathbf{x})$ es una función suave definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ con valores en \mathbb{R}^d , t_0 es el tiempo y \mathbf{x}_0 el estado inicial del sistema.

A continuación, mostramos un ejemplo de sistemas de ecuaciones diferenciales, relacionado con circuitos R-C.

Ejemplo 4.3. Consideremos el circuito de la Figura 4.9. Aplicando la primera ley de Kirchhoff,

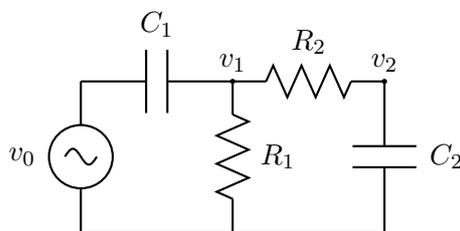


Fig. 4.9: Circuitos RC en cascada.

obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} C_2 \dot{v}_2 &= \frac{v_1 - v_2}{R_2}, \\ C_1 (\dot{v}_0 - \dot{v}_1) &= \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2}, \end{aligned}$$

si definimos los tiempos $\tau_1 = R_1 C_1$, $\tau_2 = R_2 C_2$, $\tau_a = R_2 C_1$, el sistema se escribe como

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= -\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_a}\right)v_1 + \frac{1}{\tau_a}v_2 + \dot{v}_0, \\ \dot{v}_2 &= \frac{1}{\tau_2}v_1 - \frac{1}{\tau_2}v_2.\end{aligned}$$

El sistema es un sistema lineal no homogéneo con coeficientes constantes. Si el generador produce una diferencia de potencial $v_0 = \cos(\omega t)$, el problema admite una única solución periódica $\mathbf{v}_{\text{per}}(t) = (v_{\text{per},1}(t) \ v_{\text{per},2}(t))^T$, con $v_{\text{per},j}(t) = \hat{v}_j(\omega) \cos(\omega t + \phi_j(\omega))$, donde $v_1(\omega), v_2(\omega) \in (0, 1)$ y $\phi(\omega) \in (-\pi, \pi]$. Podemos ver numéricamente que para cualquier condición inicial, se verifica

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_{\text{per}}(t) = 0.$$

Si $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 2 \text{ }\mu\text{F}$, $C_2 = 1 \text{ }\mu\text{F}$, obtenemos los gráficos de la Figura 4.10. El

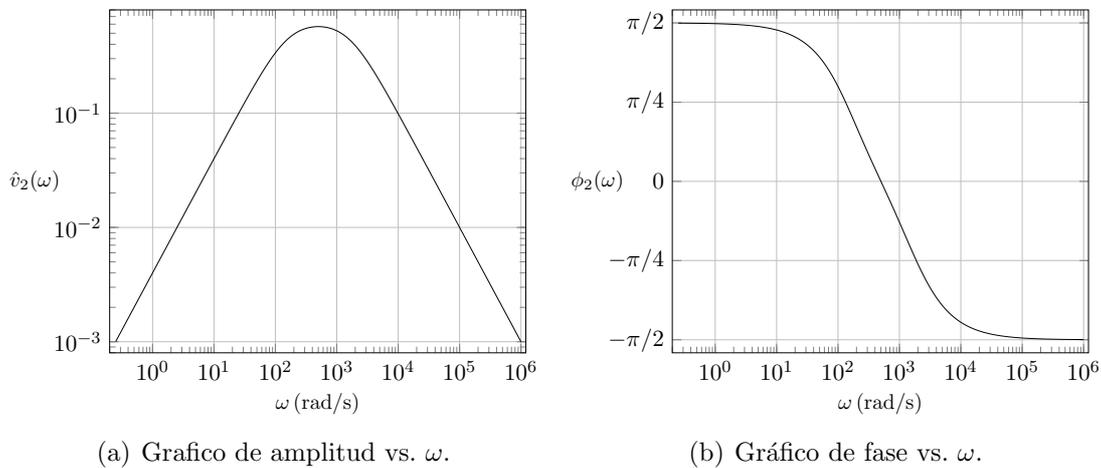


Fig. 4.10: Amplitud y fase de la solución periódica.

máximo de $\hat{v}_2(\omega)$ se alcanza en $\omega = 500 \text{ rad s}^{-1}$, para ese valor $\phi_2(\omega) = 0$.

Ejemplo 4.4 (Circuito R-L-C). Consideramos el circuito R-L-C de la Figura 4.11. Por lo que vimos en ejemplos anteriores, tenemos $Cv_C = q$, $\dot{q} = -i$, $v_L = Ldi/dt$ y $v_C - v_L = Ri$. De estas relaciones se deduce el sistema lineal

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= -i, \\ \frac{di}{dt} &= \omega^2 q - 2\xi i.\end{aligned}$$

donde $\omega = 1/\sqrt{LC}$ y $\xi = R/(2L)$. En la Figura 4.12(a) mostramos las soluciones para los parámetros $\omega = 2$, $\xi = 1/2$ y las condiciones iniciales $q(0) = 1$, $i(0) = 0$. En la Figura 4.12(b) mostramos las soluciones para los parámetros $\omega = 1/2$, $\xi = 1/2$ y las mismas condiciones iniciales. Si bien las soluciones convergen asintóticamente a 0 en ambos casos, el comportamiento es diferente. En el primero, lo hacen en forma oscilatoria, mientras que en el último, en forma monótona. Estas diferencias se relacionan con los autovalores de la matriz de coeficientes que valen $\lambda_{1,2} = \xi \pm \sqrt{\xi^2 - \omega^2}$. En el primer caso, los autovalores son complejos conjugados con parte real negativa, mientras que en el último, son ambos negativos. En la Figura 4.13 mostramos las trayectorias en el espacio de fases.

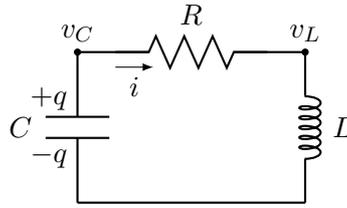
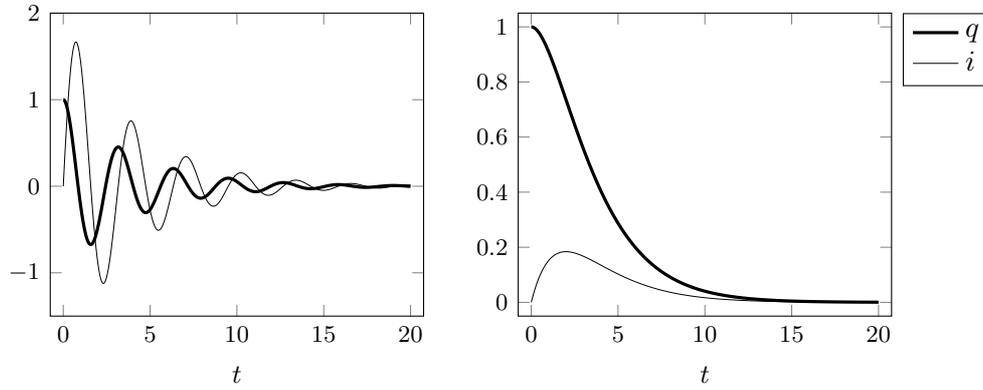


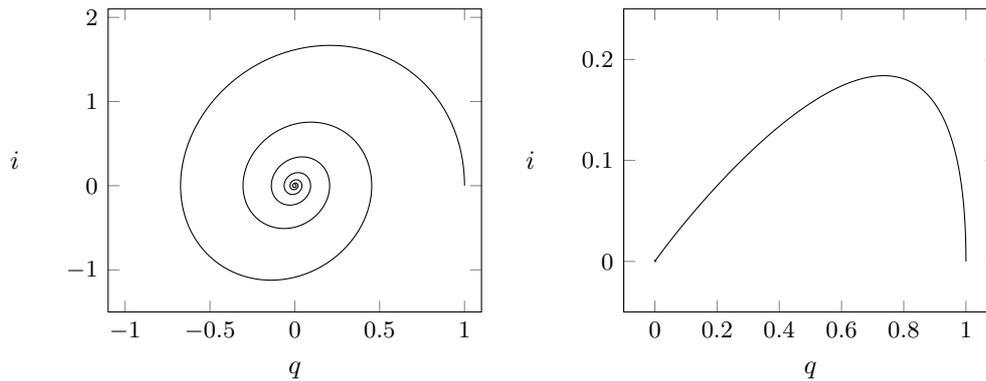
Fig. 4.11: Circuito R-L-C.



(a) Solución sub-amortiguada.

(b) Solución super-amortiguado.

Fig. 4.12: Soluciones del circuito R-L-C.



(a) Solución sub-amortiguada.

(b) Solución super-amortiguado.

Fig. 4.13: Gráfico paramétrico de las soluciones del circuito R-L-C.

4.5.1. Métodos para sistemas de ecuaciones diferenciales. Los métodos numéricos no son diferentes,

4.5.2. Ecuaciones de orden superior. La evolución de un sistema físico puede estar determinado por las derivadas de orden superior respecto del tiempo, $\dot{\mathbf{x}}(t)$, $\ddot{\mathbf{x}}(t)$, \dots . Generalmente, aunque no siempre, el sistema se escribe como la derivada de mayor orden en función del tiempo y de las derivadas de orden menor:

$$\mathbf{x}^{(k)}(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \dots, \mathbf{x}^{(k-1)}(t)),$$

con condiciones iniciales $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}^{(k-1)}(t_0) = \mathbf{x}_{k-1}$. Este problema se puede reducir al caso anterior. Si $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^d$, consideramos el vector $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^{kd}$ definido por $\mathbf{X}(t) = (\mathbf{x}(t) \dot{\mathbf{x}}(t) \dots \mathbf{x}^{(k-1)}(t))$, vale entonces

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\dot{\mathbf{x}}(t) \ddot{\mathbf{x}}(t) \dots \mathbf{x}^{(k)}(t)),$$

por lo tanto $\dot{\mathbf{X}}(t) = F(t, \mathbf{X}(t))$, donde la función $F(t, \mathbf{X}(t))$ está dada por

$$F(t, \mathbf{X}(t)) = (\dot{\mathbf{x}}(t) \ddot{\mathbf{x}}(t) \dots f(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \dots, \mathbf{x}^{(k-1)}(t))).$$

Las condiciones iniciales se pueden escribir como $\mathbf{X}(t_0) = (\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{k-1})$.

Vamos a ilustrar estas ideas con algunos ejemplos.

Ejemplo 4.5. Para explicar las leyes de Kepler, Isaac Newton estudió el movimiento de una partícula sometida a una fuerza que depende de la posición de la misma. El caso considerado corresponde al de una fuerza central, es decir la fuerza está dirigida a lo largo de la recta que une un centro fijo \mathbf{o} y la posición de la partícula, la magnitud de dicha fuerza sólo depende de la distancia al punto central. A Newton le interesa conocer el movimiento de los planetas alrededor del sol, pero sus resultados cambiaron de manera radical toda la física y la matemática. Si \mathbf{r} es el vector posición de la partícula, la fuerza ejercida sobre la misma está dada por $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \varphi(r)\mathbf{r}$, donde $r = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}$ y $\varphi(r)$ una función conocida. Por la segunda ley de Newton, si la partícula tiene masa m , las ecuaciones de movimiento son $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$. Si definimos $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$, el problema

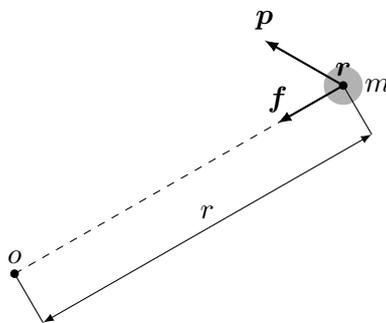


Fig. 4.14: Partícula en un campo central de fuerzas.

original se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{1}{m}\mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{f}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

4.6. Análisis de diagramas de fases.

4.7. Aplicaciones.

4.7.1. Modelo depredador-presa (Lotka–Volterra). Cuando estudiamos el crecimiento de una población, tuvimos en cuenta la tasa de crecimiento de la población natural, es decir bajo la condición de recursos ilimitados. También consideramos el caso de recursos que se agotan, pero siempre tomando una sola especie. Vamos a analizar ahora la evolución de poblaciones que interactúan. Para mantener la discusión lo más simple posible vamos a tomar dos especies, la primera que llamaremos depredador, la que se alimenta de la segunda especie, a la que denominaremos presa. Asumimos algunas hipótesis:

- los depredadores tienen como única fuente de alimentación a las presas,
- las presas cuentan con recursos ilimitados,
- la única amenaza de las presas son los depredadores.

Denotamos $x(t)$ e $y(t)$ el número de individuos de predadores y de presas a tiempo t , respectivamente. En ausencia de presas, $y(t) = 0$, $x(t)$ decae con tasa α ; mientras que en ausencia de predadores, $x(t) = 0$, $y(t)$ crece con tasa β . Además, los encuentros entre individuos de cada especie hacen crecer la población de los predadores, mientras que decrece la población de las presas, en forma proporcional al número de encuentros $n(t)$ por unidad de tiempo. Siendo que $n(t)$ es proporcional al número de predadores y al número de presas, vemos que $n(t) = k x(t) y(t)$. De esto modo, se obtiene el sistema Lotka-Volterra:

$$(4.2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x(t) + \gamma x(t) y(t), \\ \dot{y}(t) = \beta y(t) - \delta x(t) y(t), \end{cases}$$

donde γ y δ poderan el efecto de $n(t)$ en la tasa de crecimiento de predadores y presas, respectivamente. Existen muchos ejemplos que encajan parcialmente en esta descripción: leones y gacelas, aves e insectos, pandas y eucaliptos. Uno de los primeros casos donde se cuentan con datos es el de las liebres raqueta de nieve, Figura 4.17(a)¹, y el lince canadiense, Figura 4.17(b)², en la Figura. De los registros sobre el comercio de pieles en Canadá llevados por la compañía *Hudson Bay Company*³, se pueden extraer datos sobre la población de ambas especies (ver [6], página 216). En la Figura 4.15 mostramos la evolución entre los años 1845 y 1935.

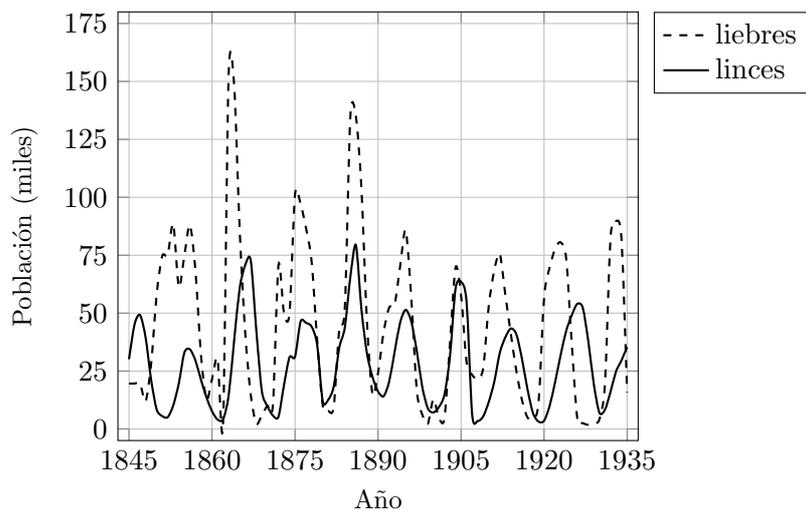


Fig. 4.15: Evolución de las poblaciones de linces canadienses y liebres raqueta de nieve.

Se puede ver analíticamente que el sistema (4.2) presenta dos puntos de equilibrio, uno de ellos es el trivial $x(t) = 0, y(t) = 0$ y el otro $x(t) = \beta/\delta, y(t) = \alpha/\gamma$. El primer cuadrante, $x, y > 0$, es invariante, es decir si $x(t_0) > 0$ e $y(t_0) > 0$, entonces $x(t) > 0$ e $y(t) > 0$ para todo t . La función $V(x, y) = \alpha \ln(y) + \beta \ln(x) - \gamma y - \delta x$ es una cantidad conservada, es decir, para cualquier solución del sistema (4.2), $V(x(t), y(t))$ es constante en el tiempo. Por lo tanto las curvas de nivel de $V(x, y)$ describen las trayectorias en el espacio de fases x, y . Se tiene entonces que las órbitas son cerradas. Dado que el punto de equilibrio $(\beta/\delta, \alpha/\gamma)$ es un máximo de $V(x, y)$, es un equilibrio estable.

En la Figura 4.16 se muestra las soluciones periódicas del sistema (4.2). Claramente, los datos mostrados en la Figura 4.15 no presentan la misma regularidad. Esto puede deberse a muchos factores; por ejemplo las hipótesis del modelo Lotka-Volterra no se verifican completamente, los linces podrían alimentarse de otros animales pequeños, la fuente de alimento de las liebres

¹© 2013, D. Gordon E. Robertson, CC BY SA 3.0.

²© 2010, Keith Williams, CC BY 2.0 <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=11394713>.

³<https://github.com/bblais/Systems-Modeling-Spring-2015-Notebooks/tree/master/data>

podrían fluctuar por razones climáticas, etc. Por otro lado, los datos poblacionales se infieren de las pieles comercializadas. Esta actividad humana esta sujeta a cambios, no necesariamente relacionados con la población. Modificaciones en las regulaciones de la caza o variaciones de la demanda⁴ de pieles podrían haber afectado la relación entre el volumen de la actividad comercial y la población de las especies.

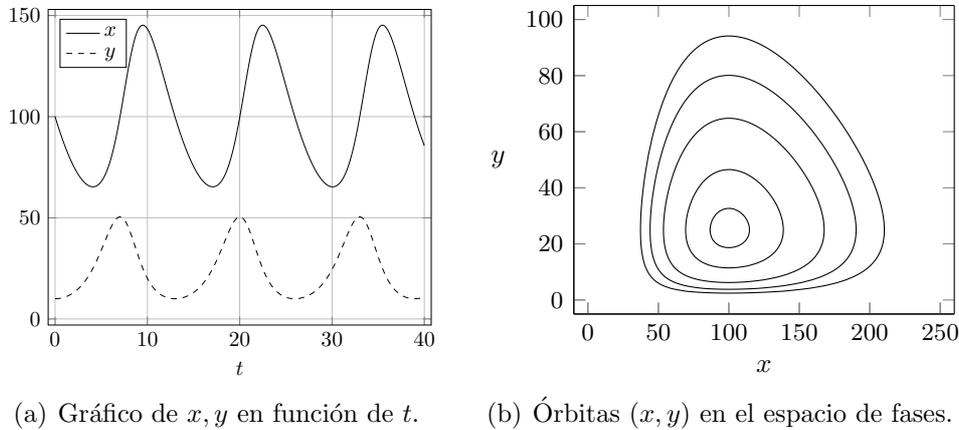


Fig. 4.16: Órbitas del sistema (4.2) para $\alpha = 0.25$, $\beta = 1.0$, $\gamma = \delta = 0.01$.



(a) Liebre raqueta de nieve.



(b) Lince canadiense.

Fig. 4.17: Presa y predador correspondiente a los datos de la Figura 4.15.

4.7.2. Modelo FitzHugh–Nagumo. En 1952, Alan Hodgkin y Andrew Huxley desarrollaron el primer modelo cuantitativo de las corrientes iónicas de Sodio (Na^+) y Potasio (K^+) en el axón gigante de la neurona de calamar, al ser estimulada con una corriente externa. El modelo consiste en un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales no lineales, conocido como modelo de Hodgkin y Huxley (HH), el cual describe la dinámica del potencial de membrana de una neurona ante la acción de una corriente aplicada. Este modelo reproduce muchas de las propiedades observadas. Sin embargo, la alta dimensión del sistema dificulta la comprensión en forma cualitativa de los fenómenos involucrados.

En 1961, Richard FitzHugh propuso un modelo simplificado que capturaba el proceso de excitación de células nerviosas. Para esto, utilizó computadoras analógicas (Figura 4.21), es decir circuitos cuyas características eléctricas simulaban el comportamiento de las células neuronales. Su trabajo dio como resultado un nuevo modelo simplificado pero efectivo. Al año siguiente,

⁴El período considerado incluye dos crisis mundiales: la gran depresión (1873-1896) y la crisis del 29 (1929-1939).



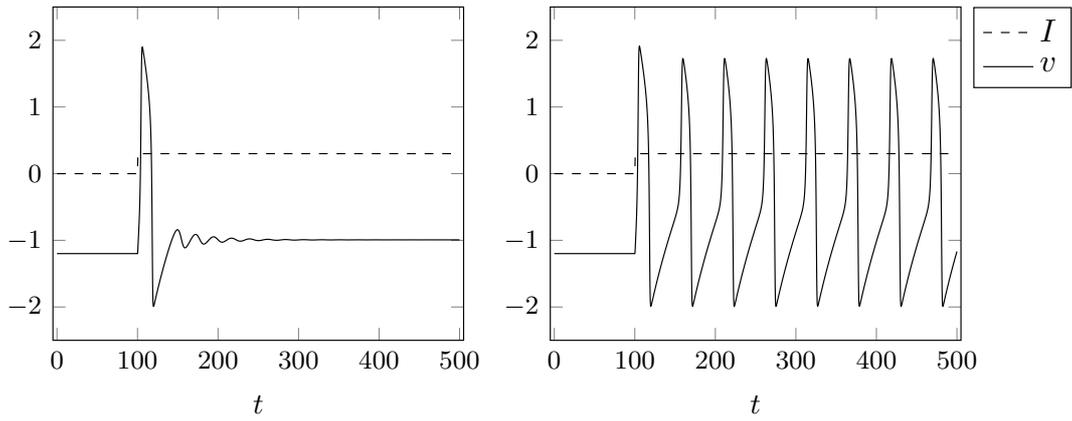
Fig. 4.18: Encuentro entre liebre y lince (© Canadian Museum of Nature).

J. Nagumo realizó un circuito electrónico equivalente a partir de diodos tunel (conductancia diferencial negativa). El modelo FitzHugh–Nagumo es un oscilador de relajación que consiste un sistema de ecuaciones diferenciales de dimensión dos que se escriben de la forma:

$$(4.3) \quad \begin{cases} \dot{v}(t) = v(t) - v^3(t)/3 - w(t) + I, \\ \tau \dot{w}(t) = v(t) + a - b w(t), \end{cases}$$

donde v representa el potencial a través de la membrana, I la corriente aplicada (estímulo), w es una variable de recuperación del sistema sin significado biofísico. Los parámetros a, b, τ son adimensionales y positivos. El valor de τ determina la relación entre la velocidad de w en relación con la de v . Debido a que la naturaleza no lineal del sistema, no podemos obtener soluciones en forma analítica. Sin embargo, se puede el comportamiento del sistema realizando algunas simulaciones numéricas. En la Figura 4.19 se muestran las soluciones para un estímulo escalón $I(t) = I_0 H(t - t_0)$, donde I_0 la amplitud del salto, t_0 el tiempo del salto y H la función de Heaviside. Se consideran los parámetros $a = 0.7$, $b = 0.8$, $\tau = 12.5$ y $t_0 = 100$. En la Figura 4.19(a) el estímulo escalón produce un pulso único de gran amplitud casi independiente de I_0 . Cuando el estímulo supera cierto umbral, la solución se comporta en forma oscilatoria (Figura 4.19(b)). Los diagramas de fases se muestran la Figura 4.20, vemos en la Figura 4.20(a) ($I_0 = 0.3$) que la trayectoria parte del estado estable para $I = 0$ y realiza una larga excursión para luego converger al nuevo punto de equilibrio. En la Figura 4.20(b), se observa el ciclo límite atractor.

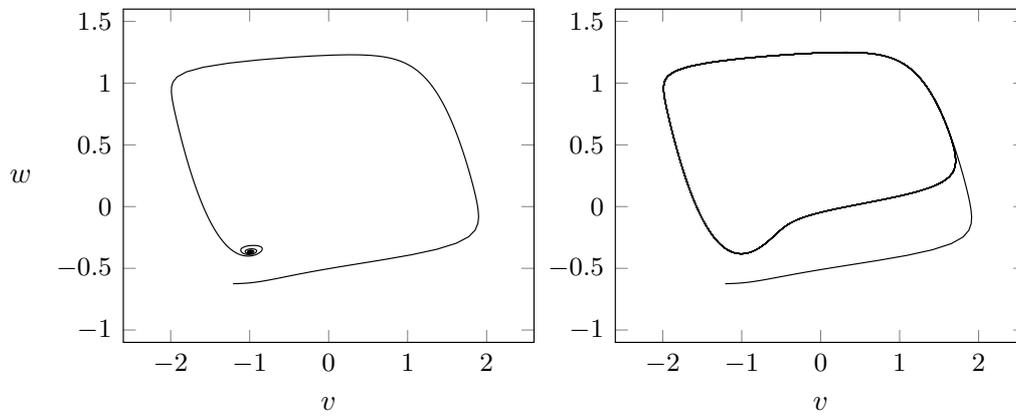
4.7.3. Atractor de Lorenz. En 1963, Edward Lorenz estudió (ver [11]) un sistema de ecuaciones diferenciales tridimensional no lineal, el cual era un modelo simplificado de la evolución temporal de flujos hidrodinámicos de la atmósfera terrestre. De la observación de los resultados obtenidos numéricamente, concluyó que el sistema no evolucionaba hacia un estado estacionario ni tampoco presentaba un comportamiento periódico. Por el contrario, su dinámica era irregular y parecía cambiar aleatoriamente, a pesar que el sistema era completamente



(a) Transición entre estados de equilibrio estables: $I_0 = 0.3$.

(b) Auto-oscilación: $I_0 = 0.325$.

Fig. 4.19: Comportamiento del sistema (4.3): potencial vs. tiempo.



(a) Punto atractor: $I_0 = 0.3$.

(b) Ciclo límite: $I_0 = 0.325$.

Fig. 4.20: Comportamiento del sistema (4.3): diagrama de fases.



Fig. 4.21: R. FitzHugh y la computadora analógica.

determinístico. El sistema estudiado es

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sigma x(t) - \sigma y(t), \\ \dot{y}(t) = \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t), \\ \dot{z}(t) = -\beta z(t) + x(t)y(t), \end{cases}$$

que para ciertos valores de los parámetros presenta, lo que hoy denominamos, comportamiento caótico⁵. Las trayectorias no convergen a un punto de equilibrio, ni se acercan a un ciclo límite (o a un toro invariante en dimensión mayor que dos). El atractor de este sistema es un conjunto fractal (dimensión de Hausdorff entre dos y tres) y exhibe un comportamiento muy complicado.

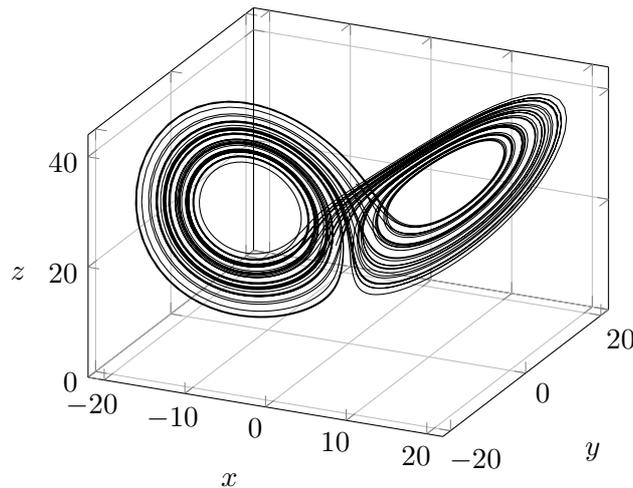


Fig. 4.22: Atractor de Lorenz

4.7.4. Métodos homotópicos para ecuaciones no lineales. En el Capítulo 3 estudiamos la resolución de ecuaciones $f(x_*) = 0$. Vamos a analizar un método diferente a los tratados ahí. La idea es modificar la ecuación lentamente desde una ecuación con solución conocida hasta la ecuación a resolver. Más concretamente, consideramos el problema $f(x(t)) = (1-t)f(x_0)$, con $t \in [0, 1]$ para $t = 0$, x_0 es claramente una solución. Por otro lado, derivando la igualdad con respecto a t , obtenemos

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -f(x_0)/f_x(x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Aplicando los métodos de integración, obtenemos una aproximación de $x(1) = x_*$, solución de la ecuación $f(x_*) = 0$. Si tomamos el ejemplo $e^x = 45$, podemos plantear el problema para $f(x) = e^x - 45$ y $x_0 = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 44e^{-x(t)}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Con el método de Runge-Kutta de orden 4 y paso $h = 0.01$, obtenemos $x(1) = 3.8066641621$, el error es $|\ln(45) - x(1)| = 1.67232 \times 10^{-6}$.

⁵Un sistema dinámico caótico presenta, entre otras características, una alta sensibilidad a variaciones de las condiciones iniciales, es decir que pequeñas variaciones en dichas condiciones iniciales producen diferencias significativas en el comportamiento futuro. Esto impide la predicción a largo plazo (efecto mariposa).

El método anterior se puede generalizar, si consideramos una función $F(t, x)$ que verifique $F(1, x) = f(x)$, $F(0, x) = g(x)$, podemos plantear $F(t, x(t)) = 0$. Si $g(x_0) = 0$ es fácil de resolver (en forma analítica o numérica), resolviendo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{F_t(t, x(t))}{F_x(t, x(t))}, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

obtenemos $x(1) = x_*$ solución de $f(x_*)$.

Para el problema $1.75x^3 - 3x - 1 = 0$, planteamos

$$F(t, x) = (1 - t)(x^3 - x) + t(1.75x^3 - 3x - 1)$$

vemos que $F(1, x) = 1.75x^3 - 3x - 1$ y $F(0, x) = x^3 - x$. Las soluciones de $F(0, x) = 0$ son $x_0 = 0, \pm 1$. Podemos resolver el problema original integrando la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{-0.75x^3 + 2x + 1}{3(1 + 0.75t)x^2 - 2t - 1}, \\ x(0) = -1, 0, 1, \end{cases}$$

obteniendo $x(1) = x_* = -1.09114, -0.360711, 1.45185$ las soluciones de $1.75x^3 - 3x - 1 = 0$. Observemos que si la ecuación cúbica fuese $1.75x^3 - 3x - 2 = 0$, cuyas soluciones son $x_* = 1.5637, -0.781849 \pm i0.345803$, un método similar nos daría una raíz partiendo de $x_0 = 1$, pero no convergería para $x_0 = -1, 0$. Esto se debe a que las raíces son complejas.

4.7.5. Teoría del cable. La evidencia experimental de la importancia de la teoría del cable en el modelado de los axones nerviosos reales comenzó a aparecer en la década de 1930 a partir de los trabajos de Cole, Curtis, Hodgkin, Katz, Rushton, Tasaki y otros. En esta época fueron muy importantes los papeles de Davis y Lorente de No (1947) y los de Hodgkin y Rushton (1946). En la década de 1950 mejoraron en las técnicas para medir la actividad eléctrica de neuronas individuales. Así, la teoría del cable llegó a ser importante para el análisis de los datos recogidos a partir de grabaciones de microelectrodos intracelulares y para el análisis de las propiedades eléctricas de las dendritas neuronales. Científicos como Coombs, Eccles, Fatt, Frank, Fuortes y otros se basaron en gran medida en la teoría de cables para obtener mayor conocimiento sobre el funcionamiento de las neuronas y para orientarse en el diseño de nuevos experimentos.

Más tarde, la teoría del cable con sus derivados matemáticos permitió modelos neuronales cada vez más sofisticados para ser explorados por investigadores como Jack, Christof Koch, Noble, Poggio, Rall, Redman, Rinzel, Idan Segev, Shepherd, Torre y Tsien. Una importante vertiente de investigación se centró en analizar los efectos de las diferentes distribuciones de entrada sináptica en la superficie dendrítica de una neurona.

Vamos a considerar el siguiente problema: un cable coaxial está formado por dos conductores concéntricos, uno central (axoplasma) y uno exterior (fluido externo). Entre ambos se encuentra una capa aislante (membrana). En una punta del cable se conecta un generador de tensión entre ambos conductores, en la otra punta se conectan a través de un resistor (Figura 4.23). El comportamiento cuantitativo del cable está determinado por cuatro constantes eléctricas:

- r_a : resistencia eléctrica por unidad de longitud del axoplasma ($\Omega \text{ cm}^{-1}$),
- r_f : resistencia eléctrica por unidad de longitud del fluido externo ($\Omega \text{ cm}^{-1}$),
- g_m : conductividad eléctrica por unidad de longitud de la membrana ($\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$),
- c_m : capacidad eléctrica por unidad de longitud de la membrana (F cm^{-1}).