

7.2. Señales periódicas. Como ya vimos, muchos sistemas, físicos, químicos, biológicos, etc., presentan un comportamiento periódico, es decir el estado del sistema se repite regularmente cada un tiempo fijo llamado período. Esto significa que las variables que describen al sistema, como por ejemplo posición, velocidad, presión, concentración, etc., son funciones periódicas del tiempo. Generalmente, esto no deja de ser una aproximación, el movimiento de un sistema comienza en algún momento y termina alguna vez. Pero dependerá de la escala temporal de las variaciones del sistema respecto a la duración del fenómeno, para que podamos considerar o no, que el sistema tiene un comportamiento periódico. Por ejemplo, si observamos la órbita del planeta Júpiter durante unos pocos siglos, no cometeremos un error significativo si suponemos que su movimiento es periódico con período de 11 años, 315 días, 1 hora y 6 minutos. En otros casos, la dinámica del sistema está muy lejos de ser periódica, en ese caso decimos que la señal observada es aperiódica, postergamos la discusión de tales señales a otra sección de este capítulo. Para tratar estos dos casos usamos herramientas diferentes, aunque relacionadas. En un sentido que habrá que justificar, podemos pensar que una señal aperiódica es una señal periódica de período infinito.

7.2.1. Señales armónicas. El más simple del comportamiento periódico es el armónico simple, $x(t) = \hat{x} \sin(2\pi t/T + \varphi)$, donde \hat{x} es la amplitud máxima, T es el período y φ la fase inicial. Definimos la frecuencia $\nu = 1/T$ y la frecuencia angular $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$, podemos escribir $x(t) = \hat{x} \sin(2\pi\nu t + \varphi) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi)$. Las unidades de $x(t)$ depende de la magnitud considerada (milímetros, voltios, amperios, etc.), pero en general la unidad para t es el segundo (o alguna fracción: milisegundos, microsegundos, etc.), que se denota por s. Definimos la unidad de frecuencia $[\nu] = \text{s}^{-1} = \text{Hz}$, denominada Hercio¹ (Hertz en inglés), la unidad de la frecuencia angular es $[\omega] = \text{rad s}^{-1}$. Por ejemplo, la tensión eléctrica domiciliaria $E(t)$ es de 220V (voltios) y 50Hz. Hay que aclarar que 220 no es el valor máximo \hat{E} , sino lo que se conoce como valor eficaz, En el caso de una señal senoidal, se verifica $\hat{E} = \sqrt{2} E_{\text{ef}}$ (ver sección ??).

Curvas de Lissajous

¹En honor a Heinrich Rudolf Hertz.

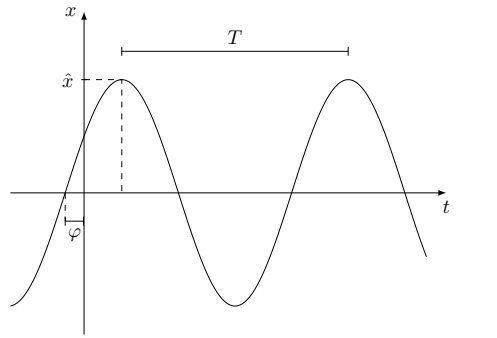
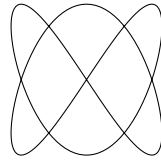


Fig. 7.2: Señal armónica

Fig. 7.3: Figura de Lissajous $m = 2, n = 3$

7.2.2. Períodos y período mínimo. Como ya vimos, una señal $s(t)$ es periódica si se repite regularmente cada cierto tiempo T , es decir

$$(7.1) \quad x(t + T) = x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

en ese caso decimos que $x(t)$ es T -periódica. Obviamente, $x(t + 2T) = x(t + T) = x(t)$, y en general $x(t + kT) = x(t)$ para k entero (ver ejercicio 7.1). Es decir que hay más de un tiempo T para el cual se verifica (7.1). En el caso particular que $x(t)$ sea constante, es decir $x(t) = \hat{x}$, esto sucede todo $T \in \mathbb{R}$. Pero fuera de este caso trivial², se puede probar que existe $T > 0$ mínimo, es decir si $x(t + \tau) = x(t), t \in \mathbb{R}$, entonces $\tau = kT$, con k número entero, en particular $|\tau| \geq T$. Decimos que T es el período de $x(t)$.

✎ **Ejercicio 7.1.** Probar que si $x(t)$ es T -periódica, entonces es kT -periódica para k entero.

✎ **Ejercicio 7.2.** Probar que si T_1 y T_2 son períodos de $x(t)$, entonces $k_1T_1 + k_2T_2$, con k_1, k_2 enteros, es un período de $x(t)$.

7.2.3. Existencia de período mínimo*. En esta sección discutimos la afirmación que hicimos arriba, sobre la existencia de período mínimo. La discusión requiere algunas herramientas matemáticas más avanzadas. Si $x(t)$ es una señal periódica no constante, definimos

$$T = \inf \{ \tau > 0 : x(t + \tau) = x(t), t \in \mathbb{R} \}$$

Por definición $T \geq 0$, probaremos que $T > 0$, en otro caso $x(t)$ es constante. En efecto, si $T = 0$, existe una sucesión de tiempos $\tau_n \rightarrow 0$ para los cuales se verifica $x(t + \tau_n) = x(t)$, entonces

$$x'(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(t + \tau_n) - x(t)}{\tau_n} = 0,$$

lo que muestra que $x(t)$ es constante. El resultado vale aunque $x(t)$ no sea derivable, pero su demostración es más complicada y excede a este apunte. La generalización no es solamente un


²Una señal constante casi no contiene información.

problema académico, dado que nos interesan señales no derivables en algunos puntos (señales triangulares), e inclusive no continuas (señales cuadradas). Por otro lado, alguna *regularidad* de la señal se tiene que verificar para que el resultado sea cierto. Por ejemplo, para la señal³ definida como

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ racional,} \\ 0 & \text{si } t \text{ irracional,} \end{cases}$$

se puede ver que para todo τ racional, se verifica $x(t + \tau) = x(t)$ y claramente $x(t)$ no es constante. Pero, en un sentido que no discutiremos aquí, $x(t)$ es equivalente a la señal nula. Supongamos que $x(t)$ es una señal periódica no constante, en ese caso $T > 0$.

Queremos ver si para $\tau > 0$, se verifica $x(t + \tau) = x(t)$, entonces $\tau = kT$ con k entero. Como T es el menor de los tiempos que verifican $x(t + \tau) = x(t)$, vemos que $T \leq \tau$. Si k es el mayor entero menor que $\tau/T \geq 1$, es decir $k = \lfloor \tau/T \rfloor$, tenemos $0 \leq \tau - kT < T$. Como τ y T son períodos de $x(t)$, vale $x(t + \tau - kT) = x(t - kT) = x(t)$. Pero $\tau - kT < T$, por lo tanto $\tau - kT = 0$.

 **Ejercicio 7.3** (*). En la afinación pitagórica, dos notas musicales consecutivas separadas por un *tono grande* mantienen una relación entre sus períodos dada por $9T_b = 8T_a$. Hallar un período del sonido que se produce al ejecutar esta dos notas.

Resolución: Si $x_a(t)$ tiene período T_a y $x_b(t)$ tiene período T_b , entonces $x(t) = x_a(t) + x_b(t)$ es T -periódica, con $T = 9T_b = 8T_a$. En efecto

$$x(t + T) = x_a(t + 8T_a) + x_b(t + 9T_b) = x_a(t) + x_b(t) = x(t).$$

7.2.4. Operaciones con señales periódicas. En otros capítulos vimos que las magnitudes físicas que describen un sistema se relacionan entre sí mediante operaciones algebraicas, suma y producto, o por operaciones del cálculo, derivación e integración. Vamos a ver que si las señales son T -periódicas, el resultado de estas operaciones también lo es. En efecto, $x_1(t), x_2(t)$ son dos señales periódicas T -periódicas, entonces $x_1(t + T) = x_1(t)$, $x_2(t + T) = x_2(t)$, por lo tanto $x_1(t + T) + x_2(t + T) = x_1(t) + x_2(t)$; lo mismo vale para el producto. Sin embargo el período mínimo puede cambiar, como vemos en el siguiente ejemplo. Si $x_1(t) = \text{sen}(2\pi t/T) + \text{sen}(4\pi t/T)$ y $s_2(t) = -\text{sen}(2\pi t/T)$, ambas tienen período mínimo T . Pero $x_1(t) + x_2(t) = \text{sen}(4\pi t/T)$ tiene período mínimo es $T/2$. Para la multiplicación los ejemplos son más sencillos aún, si $x_1(t) = x_2(t) = \text{sen}(2\pi t/T)$, entonces

$$s_1(t) \cdot s_2(t) = \text{sen}^2(2\pi t/T) = \frac{1}{2}(1 - \cos(4\pi t/T)),$$

nuevamente el período es $T/2$.

De manera similar, podemos ver que si $x(t)$ es una señal T -periódica, entonces

- $x_1(t) = x(-t)$ es T -periódica,
- $x_2(t) = x(t - \tau)$ es T -periódica para todo $\tau \in \mathbb{R}$,
- $x_3(t) = x(t/\lambda)$ λT -periódica para todo $\lambda > 0$.

³Esta función se conoce como función de Dirichlet.

Observemos que tomando $\lambda = T^{-1}$, la última afirmación muestra que la nueva señal tiene período 1. A partir de esta observación, en la próxima sección vamos a considerar señales 1-periódicas. Como se verifica

$$\frac{x(t+T+h) - x(t+T)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

tomando límite $h \rightarrow 0$, obtenemos $x'(t+T) = x'(t)$, lo que prueba que la derivada $x'(t)$ es T -periódica. No vale el resultado equivalente para primitivas de $x(t)$, por ejemplo la primitiva de una señal constante no nula, $x(t) = a \neq 0$ es $X(t) = X_0 + at$, que no es periódica. Sin embargo, la señal $x(t) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi)$ tiene primitiva, $X(t) = X_0 - \hat{x}/\omega \cos(\omega t + \varphi)$, que si es periódica. La condición necesaria y suficiente para que la primitiva de una señal periódica sea también periódica es que su valor medio sea nulo, es decir

$$\int_0^T x(t) dt = 0.$$

Si una primitiva, $X(t)$, de la señal $x(t)$, es T -periódica, de la regla de Barrow obtenemos

$$\int_0^T x(t) dt = X(T) - X(0) = 0.$$

Recíprocamente, si $x(t)$ tiene media nula, definimos

$$X(t) = \int_0^t x(t') dt',$$

entonces

$$X(t+T) = \int_0^{t+T} x(t') dt' = \int_0^T x(t') dt' + \int_T^{t+T} x(t') dt'.$$

La primera integral del lado derecho es la media de $x(t)$, y por lo tanto es nula. La segunda integral, verifica

$$\int_T^{t+T} x(t') dt' = \int_0^t x(t') dt'$$

como se ve en la Figura 7.4, lo que implica $X(t+T) = X(t)$.

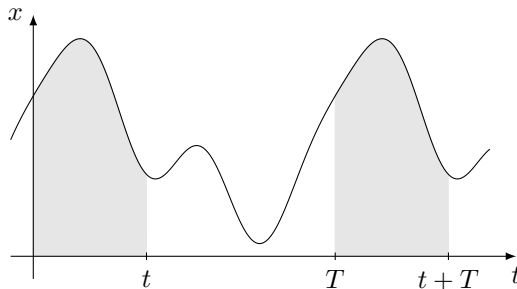



Fig. 7.4

 **Ejercicio 7.4.** Probar que si $x(t)$ es T -periódica, entonces para todo $\tau \in \mathbb{R}$

$$\int_0^T x(t) dt = \int_\tau^{\tau+T} x(t) dt,$$

como lo muestra la Figura 7.5.

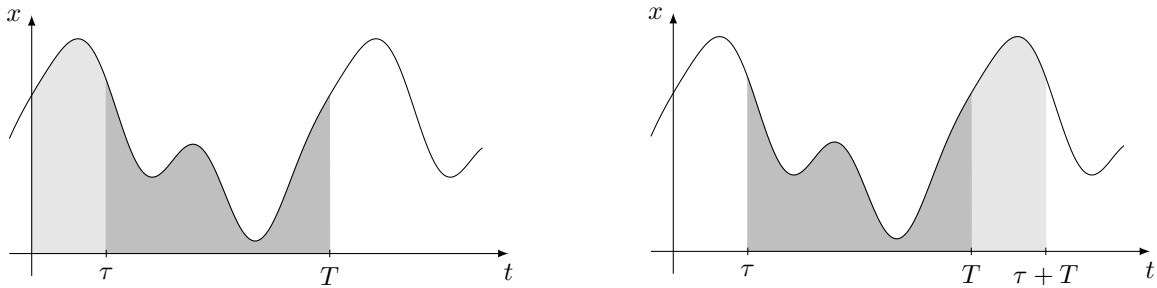


Fig. 7.5: Cálculo de la media en los intervalos $[0, T]$ y $[\tau, \tau + T]$.

7.2.5. Polinomios trigonométricos. Vamos a considerar de ahora en más, señales de período 1. Como un ejemplo importante de señales periódicas tenemos los polinomios trigonométricos, cuya expresión general está dada por

$$(7.2) \quad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(2\pi kt/T) + b_k \operatorname{sen}(2\pi kt/T)).$$

Tiene sentido llamarlos polinomios dado que si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son polinomios trigonométricos, entonces $x_1(t) + x_2(t)$ y $x_1(t) \cdot x_2(t)$ también lo son. Es fácil ver que la suma es un polinomio trigonométrico. Para el producto usamos las identidades del apéndice A.1.1:


$$\begin{aligned} \cos(2\pi jt/T) \cos(2\pi kt/T) &= \frac{1}{2} (\cos(2\pi(k-j)t/T) + \cos(2\pi(k+j)t/T)) \\ \operatorname{sen}(2\pi jt/T) \operatorname{sen}(2\pi kt/T) &= \frac{1}{2} (\cos(2\pi(k-j)t/T) - \cos(2\pi(k+j)t/T)) \\ \cos(2\pi jt/T) \operatorname{sen}(2\pi kt/T) &= \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(2\pi(k+j)t/T) - \operatorname{sen}(2\pi(k-j)t/T)) \end{aligned}$$

Usando que $e^{i2k\pi t/T} = \cos(2k\pi t/T) + i \operatorname{sen}(2k\pi t/T)$, un polinomio trigonométrico $x(t)$ se puede reescribir de la forma

$$(7.3) \quad x(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{i2k\pi t/T},$$

donde $a_0 = \alpha_0$, $a_k = \alpha_k + \alpha_{-k}$ y $b_k = i\alpha_k - i\alpha_{-k}$, o equivalentemente

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2} & , \text{ si } k > 0, \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & , \text{ si } k < 0. \end{cases}$$

 **Ejercicio 7.5.** Probar que $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ son reales si y sólo si $\alpha_{-k} = \bar{c}_k$

7.2.6. Soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales. Como vimos en el Capítulo 4, existen problema de ecuaciones diferenciales que admiten soluciones periódicas. En algunos de estos casos, podemos hallar estas soluciones en forma analítica simplemente mediante el método de coeficientes indeterminados que se propone a continuación.

Consideremos el circuito de la Figura 7.6(a), por lo visto en el Capítulo 4, el potencial $v(t)$ satisface al ecuación diferencial $\tau \dot{v}(t) + v(t) = v_0(t)$, donde $\tau = RC$. Para $v_0(t) = \hat{v}_0 \cos(\omega t)$ ($\hat{v}_0 > 0$), buscamos una solución $v(t)$ periódica de la forma $v(t) = a \cos(\omega t) + b \operatorname{sen}(\omega t)$. Reemplazando en la ecuación, obtenemos

$$\hat{v}_0 \cos(\omega t) = (a + \omega \tau b) \cos(\omega t) + (-\omega \tau a + b) \operatorname{sen}(\omega t),$$

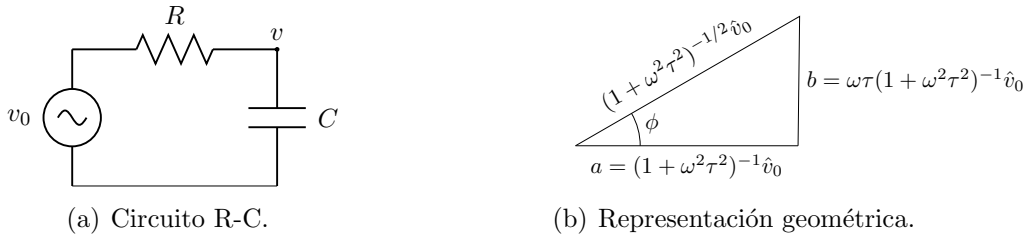


Fig. 7.6

por lo tanto $a + \omega\tau b = \hat{v}_0$, $-\omega\tau a + b = 0$. Resulta $a = (1 + \omega^2\tau^2)^{-1}\hat{v}_0$ y $b = \omega\tau(1 + \omega^2\tau^2)^{-1}\hat{v}_0$. Si definimos

$$\hat{v} = (a^2 + b^2)^{1/2} \hat{v}_0 = (1 + \omega^2\tau^2)^{-1/2} \hat{v}_0,$$

$$\phi = -\arctan(\omega\tau),$$

(ver Figura 7.6(b)), podemos escribir $a = \hat{v} \cos(\phi)$, $b = -\hat{v} \sin(\phi)$ y $v(t) = \hat{v} \cos(\omega t + \phi)$. Como el problema es lineal, vale superposición, es decir que si $v_0(t) = \hat{v}_{0,1} \cos(\omega_1 t) + \dots + \hat{v}_{0,k} \cos(\omega_k t)$, existe una solución

$$v(t) = \hat{v}_{0,1}(1 + \omega_1^2\tau^2)^{-1/2} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \dots + \hat{v}_{0,k}(1 + \omega_k^2\tau^2)^{-1/2} \cos(\omega_k t + \phi_k),$$

donde $\phi_j = \phi(\omega_j) = -\arctan(\omega_j\tau)$. Si definimos $G(\omega) = (1 + \omega^2\tau^2)^{-1/2}$, tenemos

$$v(t) = \hat{v}_{0,1} G(\omega_1) \cos(\omega_1 t + \phi(\omega_1)) + \dots + \hat{v}_{0,k} G(\omega_k) \cos(\omega_k t + \phi(\omega_k)),$$

Si escribimos $v_0(t) = \frac{1}{2}\hat{v}_0 e^{i\omega t} + \frac{1}{2}\hat{v}_0 e^{-i\omega t}$, la solución $v(t)$ se puede expresar como

$$v(t) = \frac{1}{2}\hat{v}_0 G(\omega) e^{i\phi(\omega)} e^{i\omega t} + \frac{1}{2}\hat{v}_0 G(-\omega) e^{-i\phi(\omega)} e^{-i\omega t} = \frac{1}{2}\hat{v}_0 H(\omega) e^{i\omega t} + \frac{1}{2}\hat{v}_0 H(-\omega) e^{-i\omega t},$$

donde $H(\omega)$ es la función (con valores complejos) dada por $H(\omega) = G(\omega) e^{i\phi(\omega)}$ ⁴.

En particular si $v_0(t)$ está dada por $v_0(t) = \sum_{k=-n}^n \hat{v}_{0,k} e^{i2k\pi t/T}$, la solución $v(t)$ es el polinomio trigonométrico dado por

$$(7.4) \quad v(t) = \sum_{k=-n}^n \hat{v}_{0,k} H(2k\pi/T) e^{i2k\pi t/T}.$$

7.2.7. Convolución. Motivados por la igualdad (7.4) de la sección anterior, vamos a definir una nueva operación sobre las señales periódicas, llamado producto de convolución: dadas dos señales, $x_1(t), x_2(t)$, definidas por los polinomios trigonométricos

$$x_1(t) = \sum_{j=-n}^n \alpha_{1,k} e^{i2j\pi t/T}, \quad x_2(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_{2,k} e^{i2k\pi t/T},$$

definimos el producto de convolución, $x = x_1 * x_2$, como el polinomio trigonométrico

$$x(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_{1,k} \alpha_{2,k} e^{i2k\pi t/T}.$$

Volviendo a (7.4), si $v_0(t) = \sum_{k=-n}^n \hat{v}_{0,k} e^{i2k\pi t/T}$ y definimos $h(t) = \sum_{k=-n}^n H(2k\pi/T) e^{i2k\pi t/T}$

$$v(t) = (h * v_0)(t) = \sum_{k=-n}^n H(2k\pi/T) \hat{v}_{0,k} e^{i2k\pi t/T}$$

De la definición de producto de convolución, claramente valen:

⁴Se puede ver que $H(\omega) = (1 + i\omega\tau)^{-1}$.

- $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$,
- $x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$,
- $(x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3)$.

Vamos a probar que se puede obtener $x(t) = (x_1 * x_2)(t)$ mediante la fórmula

$$(7.5) \quad x(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t') x_2(t-t') dt'.$$

Usando las expresiones de $x_1(t)$ y $x_2(t)$, obtenemos

$$x(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=-n}^n \sum_{k=-n}^n c_{1,j} c_{2,k} e^{i2j\pi t'/T} e^{i2k\pi(t-t')/T} dt',$$

intercambiando la integral con las sumatorias, vemos que

$$x(t) = \sum_{j=-n}^n \sum_{k=-n}^n c_{1,j} c_{2,k} e^{i2k\pi t/T} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i2(j-k)\pi t'/T} dt'$$

Como

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{i2(j-k)\pi t'/T} dt' = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j \neq k, \end{cases}$$

concluimos que

$$x(t) = \sum_{j=-n}^n \sum_{k=-n}^n c_{1,j} c_{2,k} e^{i2k\pi t/T} \delta_{j,k} = \sum_{k=-n}^n c_{1,k} c_{2,k} e^{i2k\pi t/T}.$$

📌 **Ejercicio 7.6.** Probar que si los coeficientes de $x(t) = (x_1 * x_2)(t)$ en forma trigonométrica verifican $a_k = (a_{1,k}a_{2,k} - b_{1,k}b_{2,k})/2$ y $b_k = (a_{1,k}b_{2,k} + b_{1,k}a_{2,k})/2$.

7.2.8. Cálculo de los coeficientes. Supongamos que sabemos que la señal $x(t)$ periódica se representa por un polinomio trigonométrico, pero sus coeficientes son desconocidos. Nos planteamos como hallar los coeficientes a partir de los valores de $x(t)$. Vamos a proponer dos posibles respuestas. La primera forma consiste en evaluar $x(t)$ en número suficientemente grande de tiempos t_1, \dots, t_N y resolver un sistema de ecuaciones lineales en los coeficientes c_{-n}, \dots, c_n :

$$\begin{pmatrix} e^{-i2n\pi t_1/T} & \dots & e^{-i2\pi t_1/T} & 1 & e^{i2\pi t_1/T} & \dots & e^{i2n\pi t_1/T} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-i2n\pi t_N/T} & \dots & e^{-i2\pi t_N/T} & 1 & e^{i2\pi t_N/T} & \dots & e^{i2n\pi t_N/T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-n} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_1) \\ \vdots \\ x(t_N) \end{pmatrix}$$

Para asegurarnos que el sistema tenga solución única tomamos $N = 2n + 1$, la matriz resultante debe ser inversible. Este problema será estudiado con detalle en la Sección 7.3.

La segunda forma de obtener los coeficientes se basa en expresiones integrales. Estas relaciones nos permiten extender estas ideas a señales arbitrarias. Observando que se verifican las

igualdades

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \int_0^T \cos(2k\pi t/T) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{sen}(2k\pi t/T) dt = 0, \\ \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2k\pi t/T) \operatorname{sen}(2m\pi t/T) dt &= 0, \\ \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2k\pi t/T) \cos(2m\pi t/T) dt &= \frac{1}{2} \delta_{k,m}, \\ \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{sen}(2k\pi t/T) \operatorname{sen}(2m\pi t/T) dt &= \frac{1}{2} \delta_{k,m},\end{aligned}$$

vemos que

$$(7.6a) \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt,$$

$$(7.6b) \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2k\pi t/T) dt,$$

$$(7.6c) \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \operatorname{sen}(2k\pi t/T) dt.$$

Podemos obtener fórmulas equivalentes para los coeficientes en la forma exponencial de $x(t)$, si $k \geq 1$ tenemos

$$(7.7) \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) (\cos(2k\pi t/T) - i \operatorname{sen}(2k\pi t/T)) dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i2k\pi t/T} dt,$$

Es posible ver que esta última expresión, vale también para $k \leq 0$. Podemos observar que si $x(t)$ toma valores reales si y solo si los coeficientes a_0, a_k, b_k son reales, lo que es equivalente a $c_{-k} = \bar{c}_k$. Si $x(t)$ es par, entonces $b_k = 0$ y

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2k\pi t/T) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(2k\pi t/T) dt.$$

De la misma forma, si $x(t)$ es impar, entonces $a_k = 0$ y

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \operatorname{sen}(2k\pi t/T) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \operatorname{sen}(2k\pi t/T) dt.$$

7.2.9. Aproximación de Fourier. Hasta ahora hemos considerado polinomios trigonométricos, pero podemos extender estas ideas al caso general. Para una señal arbitraria $x(t)$, definimos los coeficientes de Fourier por (7.6) (o por (7.7)) Claramente siguen valiendo las relaciones $c_k = (a_k - ib_k)/2$, $c_{-k} = (a_k + ib_k)/2$ para $k \geq 1$. Si $x(t)$ toma valores reales, entonces los coeficientes a_0, a_k, b_k son reales y $c_{-k} = \bar{c}_k$.

Para todo $n \geq 1$, definimos la aproximación de Fourier

$$(7.8) \quad x_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i2k\pi t/T} = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(2k\pi t/T) + b_k \operatorname{sen}(2k\pi t/T).$$

La teoría de Fourier afirma que los polinomios trigonométricos $x_n(t)$ aproximan a cualquier señal $x(t)$ con un grado de exactitud arbitrario, es decir si $x(t)$ es una señal T -periódica, entonces los polinomios trigonométricos $x_n(t)$ definidos por (7.8) verifican $x_n(t) \rightarrow x(t)$ cuando $n \rightarrow \infty$. El sentido de la convergencia no es obvio y debe ser estudiado.

La discusión sobre que funciones se pueden aproximar por polinomios trigonométricos comenzó a mediados del siglo XVIII y se extendió por mucho más de un siglo, participaron entre otros Leonhard Euler, Jean le Rond D'Alembert, Daniel Bernoulli, Joseph-Louis Lagrange, Jean-Baptiste Joseph Fourier (ver [9]). Este problema puso en crisis la noción misma de función y la de integración⁵, llevando a una revisión profunda de estos conceptos durante la primera mitad del siglo XX. El argumento de quienes pensaban que no toda función se podía expresar como límite de polinomios trigonométricos (Euler, D'Alembert, Lagrange), se basaba en la imposibilidad de representar una función partida⁶ por una única suma de senos y cosenos. El siguiente ejemplo refuta, en forma gráfica, esta objeción.

Ejemplo 7.3. Consideremos $x(t)$ la señal triangular de la Figura 7.7, correspondiente a la función periódica, con período 1, dada por $x(t) = 1 - 4|t|$ si $t \in [-1/2, 1/2]$. Siendo $x(t)$ par, los coeficientes b_k , correspondientes a $\sin(2k\pi t)$, son nulos. Los coeficientes a_k valen

$$a_k = 2 \int_{-1/2}^{1/2} (1 - 4|t|) \cos(2k\pi t) dt = 4 \int_0^{1/2} (1 - 4t) \cos(2k\pi t) dt = \frac{4(1 - (-1)^k)}{\pi^2 k^2}.$$

Si definimos los polinomios trigonométricos

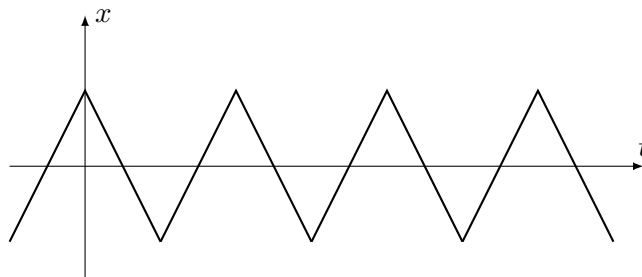


Fig. 7.7: Señal triangular.

$$x_{2n+1}(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2(2k+1)\pi t),$$

vemos en la Figura 7.8 que a medida que aumenta el número de términos, la aproximación es cada vez mejor. Consideremos por ejemplo $t = 0$, que es un punto donde cambia la definición de $x(t)$ (un punto de discontinuidad según Euler), en la Tabla 7.1 mostramos el valor de $x_{2n+1}(0)$ para $n = 10, 100, 1000, 10000$. Claramente vemos que $x_{2n+1}(0) \rightarrow x(0) = 1$. En la Tabla 7.1 mostramos la suma para distinto valores de n .

n	10	100	1000	10000
$x_{2n+1}(0)$	0.981 591	0.997 994	0.999 798	0.999 980

Tabla 7.1

En particular, vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1}(0) = \frac{\pi^2}{8}.$$

⁵Casi todos los conceptos del análisis matemático tuvieron que ser reformulados

⁶Esto era lo que Euler entendía por una función discontinua.

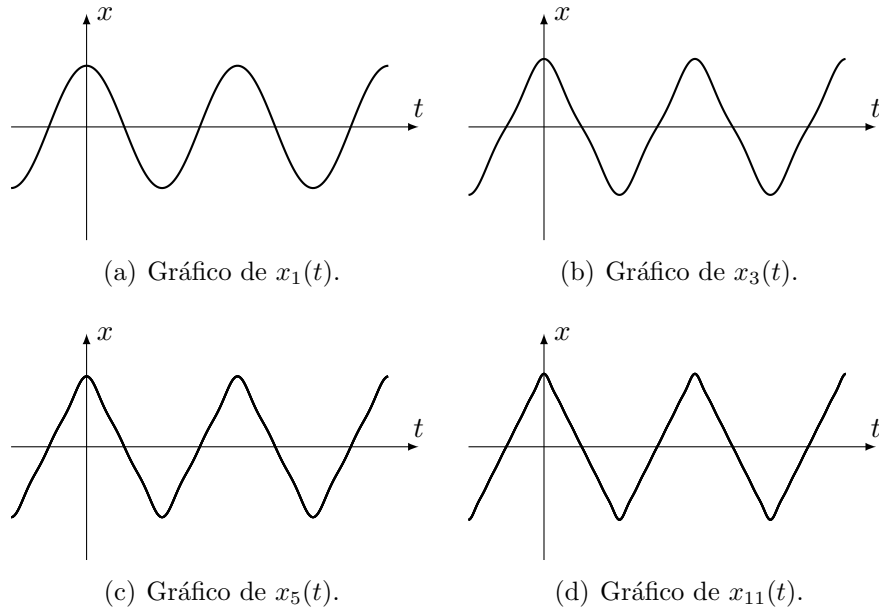
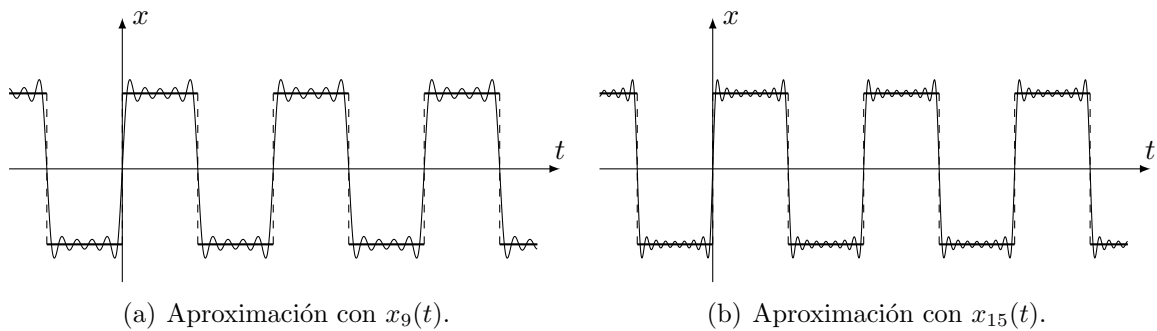


Fig. 7.8: Aproximaciones por polinomios trigonométricos de la señal triangular.

Fig. 7.9: Señal cuadrada $x(t)$ y la aproximación $x_n(t)$.

Observamos en el ejemplo anterior, que los polinomios trigonométricos aproximan en forma uniforme a $x(t)$, es decir

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |x(t) - x_n(t)| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |x(t) - x_n(t)| \rightarrow 0, \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

Dado que los polinomios trigonométricos son continuos, no podrían converger uniformemente a una señal discontinua. En el siguiente ejemplo vemos en que sentido podemos plantear la convergencia.

Ejemplo 7.4. Estudiamos ahora $x(t)$ la señal cuadrada de la Figura 7.9, 1–periódica, definida por $x(t) = 1$ si $t \in [0, 1/2)$ y $x(t) = -1$ si $t \in [-1/2, 0)$. Siendo impar, solo calcularemos los coeficientes b_k , integrando obtenemos

$$b_k = 2 \int_{-1/2}^{1/2} x(t) \sin(2k\pi t) dt = 4 \int_0^{1/2} \sin(2k\pi t) dt = \frac{2(1 - (-1)^k)}{\pi k},$$

vemos que para k par, $b_k = 0$ y $b_k = 4(\pi k)^{-1}$ si k es impar. En este caso, los polinomios trigonométricos que aproximan a $x(t)$ son

$$x_{2n+1}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \sin(2(2k+1)\pi t),$$

En la Figura 7.9(a), superpusimos sobre la señal cuadrada el polinomio trigonométrico $x_9(t)$, y en la Figura 7.9(b), $x_{15}(t)$. Vemos que en las discontinuidades, $t = 0, \pm 1/2, \pm 1, \dots$, la aproximación toma el valor 0, que es el punto medio del salto. Esto no es particular del ejemplo, puede probarse para cualquier señal con saltos. Observamos que cerca de la discontinuidad aparecen oscilaciones que, al aumentar n , no disminuyen en amplitud, solo se acercan al punto de discontinuidad. A este comportamiento se lo conoce como fenómeno de Gibbs. En la Figura

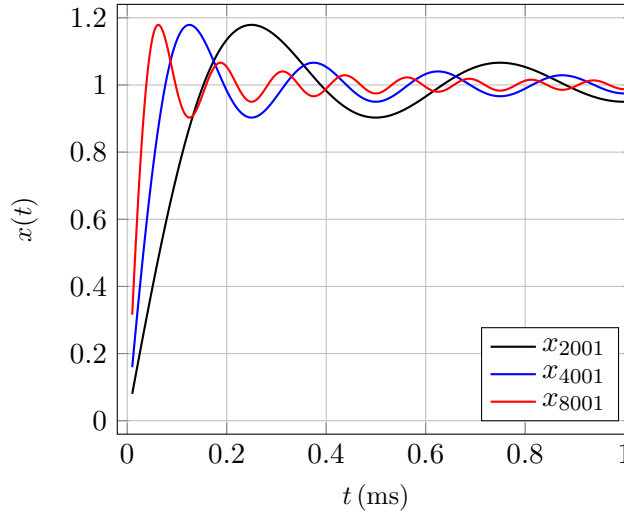


Fig. 7.10: Fenómeno de Gibbs.

7.10 vemos una ampliación de las oscilaciones en el primer milisegundo, $0 \leq t \leq 10^{-3}$, para $n = 1000, 2000, 4000$. La altura del máximo no se modifica, de hecho se puede probar que corresponde aproximadamente al 9% del valor del salto ($2 = 1 - (-1)$ en este caso) para cualquier discontinuidad. Sin embargo, las oscilaciones se van concentrando cada vez más cerca del tiempo del salto, a medida que n crece. Esto nos dice que $x_n(t)$ converge a $x(t)$ para cualquier tiempo fuera de las discontinuidades.

7.2.10. Potencia de una señal y convergencia en media cuadrática. En un circuito eléctrico, la energía disipada en un resistor es proporcional al cuadrado de $v(t)$, donde $v(t)$ es la diferencia de potencial entre los bornes del resistor. Concretamente, por la ley de Joule, la potencia es $P(t) = v(t)i(t) = v^2(t)/R$, por lo tanto la energía disipada por período es

$$E = \frac{1}{R} \int_0^T |v(t)|^2 dt,$$

la potencia media está dada por $\bar{P} = E/T$. Si $v(t)$ es un polinomio trigonométrico T -periódico,

$$v(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(2k\pi t/T) + b_k \sin(2k\pi t/T),$$

entonces, usando las igualdades A.1.1 obtenemos

$$\bar{P}R = \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2.$$

Estudiamos el problema general, si $x(t)$ es una señal T -periódica y $x_n(t)$ el polinomio trigonométrico aproximante

$$x_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(2k\pi t/T) + b_k \sin(2k\pi t/T),$$

Por simplicidad en el análisis vamos a suponer que $x(t)$ toma valores reales, fácilmente se puede extender al caso general. Vamos a medir la bondad de la aproximación como la diferencia en media cuadrática:

$$\frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - x_n(t))^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt - \frac{2}{T} \int_0^T x(t) x_n(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T x_n^2(t) dt.$$

Ya vimos como calcular la última integral a partir de los coeficientes, la segunda integral vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x_n(t) dt &= \frac{a_0}{T} \int_0^T x(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{T} \int_0^T x(t) \cos(2k\pi t/T) dt \\ &\quad + \frac{b_k}{T} \int_0^T x(t) \sin(2k\pi t/T) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x_n^2(t) dt, \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$0 \leq \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - x_n(t))^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T x_n^2(t) dt,$$

que se puede escribir como la denominada desigualdad de Bessel:

$$\frac{1}{T} \int_0^T x_n^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt.$$

Además, $x_n(t)$ converge en media cuadrática a $x(t)$ si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_n^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt,$$

en ese caso, obtenemos la identidad de Parseval

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt.$$

Por ejemplo, para la señal cuadrada tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_n^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n b_k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} = 1,$$

por lo visto en el Ejemplo 7.3, lo que muestra la convergencia en $x_n(t)$ en media cuadrática a $x(t)$. Se puede probar que bajo hipótesis muy generales sobre la señal, los polinomios trigonométricos obtenidos mediante (7.7), convergen en media cuadrática⁷ a $x(t)$.

Si $x_T(t)$ es la señal triangular considerada en el Ejemplo 7.3 y $x_C(t)$ la señal cuadrada del Ejemplo 7.4, vemos que $\dot{x}_T(t) = -4x_C(t)$. Analicemos que sucede con las aproximaciones de Fourier

$$\dot{x}_{T,2n+1}(t) = -\frac{16}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \sin(2(2k+1)\pi t) = -4x_{C,2n+1}(t).$$

Esto es general para cualquier señal $x(t)$. Por ejemplo, la primitiva de $x_T(t)$ con media nula, está dada por la función 1-periódica que verifica

$$X_T(t) = \begin{cases} t + 2t^2 & \text{si } -1/2 \leq t < 0, \\ t - 2t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1/2, \end{cases}$$

⁷Sin embargo la convergencia puntual no vale, aún para señales $x(t)$ continuas.

Por otro lado, la primitiva de $x_{T,2n+1}(t)$ vale

$$X_{T,2n+1}(t) = \frac{4}{\pi^3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^3} \operatorname{sen}(2(2k+1)\pi t),$$

que corresponde a la aproximación de Fourier de $X_T(t)$.

Es posible mostrar que si $x(t) = (x_1 * x_2)(t)$, definida por (7.5), entonces $c_k = c_{1,k} c_{2,k}$ para señales en general (lo habíamos probado para polinomios trigonométricos).

Nota: En efecto,

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i2k\pi t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t') x_2(t-t') dt' e^{-i2k\pi t} dt \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T x_1(t') x_2(t-t') e^{-i2k\pi t'} e^{-i2k\pi(t-t')} dt' dt \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_{-t'}^{-t'+T} x_1(t') x_2(t) e^{-i2k\pi t'} e^{-i2k\pi t} dt dt' \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T x_1(t') x_2(t) e^{-i2k\pi t'} e^{-i2k\pi t} dt dt' = c_{1,k} c_{2,k}. \end{aligned}$$

En particular, las aproximaciones de Fourier verifican $x_n(t) = (x_{1,n} * x_{2,n})(t)$.

Ejemplo 7.5. Consideremos $h(t)$ la función T -periódica que vale $h(t) = Ae^{-t/\tau}$, sus coeficientes de Fourier son

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T Ae^{-t/\tau} e^{-i2k\pi t/T} dt = \frac{\tau}{T} A (1 - e^{-T/\tau}) \frac{1}{1 + i\tau 2k\pi/T}$$

Si tomamos $A = T/\tau (1 - e^{-T/\tau})^{-1}$, obtenemos $c_k = (1 + i\tau 2k\pi/T)^{-1}$. Por lo tanto la solución periódica del circuito de la Figura 7.6(a) dada en (7.4) se escribe como

$$v(t) = (h * v_0)(t) = \frac{1}{T} \int_0^T h(t-t') v_0(t') dt'.$$

Función de Green: El resultado anterior se puede obtener directamente, pero es un poco laborioso. Si dividimos en el intervalo $[0, T]$ en $[0, t]$ y $[t, T]$, $v(t)$ se escribe en la forma

$$v(t) = (h * v_0)(t) = \frac{1}{T} \int_0^t h(t-t') v_0(t') dt' + \frac{1}{T} \int_t^T h(t-t') v_0(t') dt',$$

como $h(t)$ es T -periódica, tenemos $h(t-t') = h(T+t-t')$, de donde se deduce

$$v(t) = \frac{1}{T} \int_0^t h(t-t') v_0(t') dt' + \frac{1}{T} \int_t^T h(T+t-t') v_0(t') dt',$$

usando que $h(t) = Ae^{-t/\tau}$ para $t \in [0, T]$ (observemos que $T+t-t' \in [0, T]$ si $t' \in [t, T]$) se obtiene

$$v(t) = \frac{A}{T} \int_0^t e^{-(t-t')/\tau} v_0(t') dt' + \frac{A}{T} \int_t^T e^{-(T+t-t')/\tau} v_0(t') dt',$$

que se reescribe como

$$v(t) = \frac{Ae^{-t/\tau}}{T} \int_0^t e^{t'/\tau} v_0(t') dt' + \frac{Ae^{-(T+t)/\tau}}{T} \int_t^T e^{t'/\tau} v_0(t') dt'.$$

Si derivamos esta expresión, usando el teorema fundamental del cálculo, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= -\frac{Ae^{-t/\tau}}{T\tau} \int_0^t e^{t'/\tau} v_0(t') dt' - \frac{Ae^{-(T+t)/\tau}}{T\tau} \int_t^T e^{t'/\tau} v_0(t') dt' \\ &\quad + \frac{Ae^{-t/\tau}}{T} e^{t/\tau} v_0(t) - \frac{Ae^{-(T+t)/\tau}}{T} e^{t/\tau} v_0(t), \end{aligned}$$

agrupando los dos primeros términos y los dos últimos, vemos que

$$\dot{v}(t) = -\frac{1}{\tau}v(t) + \frac{A(1 - e^{-T/\tau})}{T}v_0(t)$$

y por lo tanto $\tau\dot{v}(t) + v(t) = A\tau(1 - e^{-T/\tau})/Tv_0(t)$. Por la elección que hicimos de la constante A , resulta $\tau\dot{v}(t) + v(t) = v_0(t)$. La función $h(t)$ se conoce como la función de Green asociada a la ecuación diferencial.

7.3. Transformada discreta de Fourier. Para calcular los coeficientes de una señal $x(t)$ debemos calcular las integrales indicadas en (7.7). El cálculo analítico de estas integrales puede ser difícil o directamente imposible si, por ejemplo, la señal considerada es el resultado de mediciones. Planteamos entonces alternativas numéricas.

7.3.1. Método de los trapecios. Entre los algoritmos más usados para calcular integrales en forma numérica se encuentra el método de trapecios. Para integrar $x(t)$ en un intervalo $[0, T]$, tomamos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$ y aproximamos la integral mediante el área (con signo) de la región trapezoidal encerrada por el segmento secante que pasa por dos puntos consecutivos del gráfico, es decir

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t)dt &\cong \frac{x(t_0) + x(t_1)}{2}(t_1 - t_0) + \dots + \frac{x(t_{N-1}) + x(t_N)}{2}(t_N - t_{N-1}) \\ &= \frac{1}{2}(x(t_0) + 2x(t_1) + \dots + 2x(t_{N-1}) + x(t_N)). \end{aligned}$$

Si los intervalos son de la misma longitud: $(t_j - t_{j-1}) = \Delta t = T/N$ ($t_j = jT/N$), entonces

$$\int_0^T x(t)dt \cong \frac{T}{2N}(x(t_0) + 2x(t_1) + \dots + 2x(t_{N-1}) + x(t_N)).$$

Si $x(t)$ es T -periódica, tenemos $x(t_0) = x(t_N)$, por lo tanto

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt \cong \frac{1}{N}(x(t_0) + x(t_1) + \dots + x(t_{N-1})).$$

7.3.2. Muestreo de señales. Para poder el cálculo de los coeficientes de una señal mediante intergación por trapecios necesitamos los valores de la misma en los tiempos $t_j = jT/N$ con $j = 0, \dots, N - 1$. En la Figura 7.11(a) mostramos esquemáticamente el dispositivo físico para obtener el vector de muestras $\mathbf{x} = (x(t_0) x(t_1) \dots, x(t_{N-1}))$. Inicialmente, la señal física $x(t)$ se convierte en una señal eléctrica mediante un sistema sensor (micrófono, pHmetro, termopar, sensor fotoeléctrico, etc.) La señal eléctrica obtenida se procesa, generalmente en forma analógica, y luego se conecta a un interruptor activado por la señal de reloj $s(t)$ (Figura 7.11(b)), el circuito se cierra en los tiempos t_j , dando a la salida valores x_0, x_1, \dots, x_{N-1} proporcionales a los valores $x(t_j)$. Varios problemas prácticos deben ser tenidos en cuenta. Generalmente los sensores tienen respuesta no lineal, es decir la señal eléctrica obtenida por el sensor no es proporcional a la señal $x(t)$. Además, los sensores suelen tener baja sensibilidad, esto significa que las señales eléctricas obtenidas son muy débiles, lo que dificulta su medición. Ambos problemas pueden ser solucionados mediante circuitos electrónicos, que linealicen y amplifiquen la salida del sensor. Por otro lado, el muestreo teórico debe ser instantáneo, lo que es físicamente imposible. Por lo que, como resulta del muestreo, obtenemos un valor promedio en el intervalo de medición en lugar de $x(t_j)$. En la mayoría de las aplicaciones, los tiempos característicos de la señal son mucho mayores que la velocidad del interruptor, y por lo tanto, del proceso de muestreo se obtienen resultados similares a los teóricos. Otro punto a tener en cuenta es la discretización de los resultados en un soporte digital. En principio $x_j = x(t_j)$ es

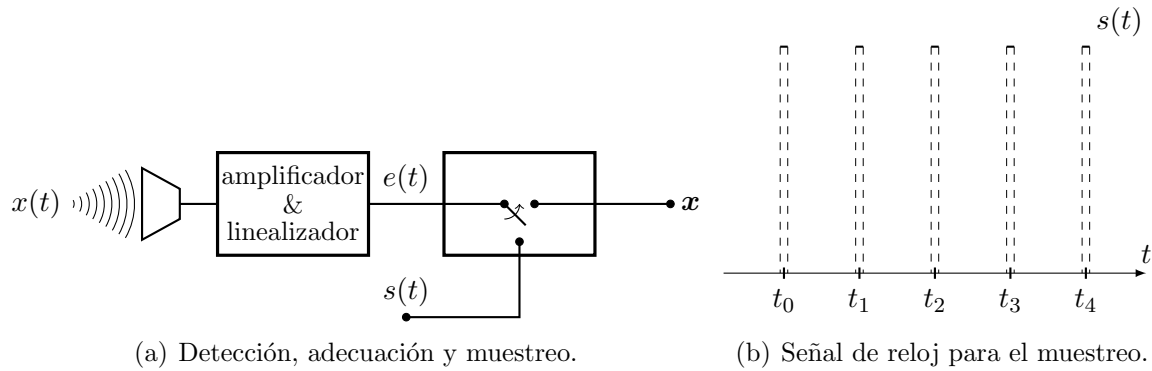


Fig. 7.11: Conversión de señales continuas en discretas.

un número real, pero para almacenar los valores muestreados se toma un conjunto finito de valores posibles. Por ejemplo, si se guardan en una computadora, los valores se representarían en punto flotante. Si se guardan en un soporte físico, como por ejemplo en un CD, se consideran niveles equiespaciados que se pueden expresar por un número entero. En los CD de audio, la frecuencia de muestreo es de 44.1 kHz, es decir $\Delta t = t_j - t_{j-1} = 22.6757 \mu\text{s}$, los valores adquiridos se representan en forma digital con 16 bits, lo que equivale a $2^{16} = 65536$ niveles.

7.3.3. Definición de DFT. Como resultado de la discretización de una señal $x(t)$, obtenemos un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ dado por $\mathbf{x} = (x(t_0) x(t_1) \dots x(t_{N-1}))$, queremos calcular los coeficientes de Fourier de la señal definidos por (7.7) mediante la integración por trapecios:

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(jT/N) e^{-i2\pi jk/N}.$$

definido para todo entero k . Observemos que $\hat{x}_{k+N} = \hat{x}_k$, dado que $e^{-i2\pi j} = 1$ y por lo tanto

$$e^{-i2\pi j(k+N)/N} = e^{-i2\pi jk/N - i2\pi j} = e^{-i2\pi jk/N} e^{-i2\pi j} = e^{-i2\pi jk/N}.$$

A partir de esta observación, definimos la transformada discreta de Fourier del vector $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ como el vector $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^N$ dado por $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_0 \hat{x}_1 \dots \hat{x}_{N-1})$. El Algoritmo 7.1 permite calcular el vector $\hat{\mathbf{x}}$ (*xf_list*) teniendo como dato \mathbf{x} (*x_list*) y N . El número de multiplicaciones necesarias para calcular la transformada discreta de Fourier con este algoritmo es N^2 . Más adelante, presentamos el algoritmo denominado FFT (Fast Fourier Transform) que realiza el cálculo con muchas menos operaciones.

Algoritmo 7.1: Transformada discreta de Fourier.

```

Data:  $N, x\_list$ 
Result:  $xf\_list$ 
for  $k = 0$  to  $N - 1$  do
   $xf\_list(k) = 0;$ 
  for  $j = 0$  to  $N - 1$  do
     $xf\_list(k) = xf\_list(k) + x\_list(j) \exp(-i2\pi jk/N);$ 
  end
   $xf\_list(k) = xf\_list(k)/N;$ 
end
return  $xf\_list;$ 

```

Ejemplo 7.6. Consideremos la señal armónica $x(t) = \text{sen}(2\pi t)$ de período $T = 1$, para $N = 7$ ($\Delta t \cong 0.142857$) obtenemos la señal discreta

$$\mathbf{x} = (0, 0.781831, 0.974928, 0.433884, -0.433884, -0.974928, -0.781831)$$

La transformada discreta de Fourier del vector \mathbf{x} vale

$$\hat{\mathbf{x}} = (0, -i 0.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, i 0.5)$$

Si modificamos la frecuencia de la señal y tomamos $x(t) = \text{sen}(6\pi t)$, también como una señal de período $T = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (0, 0.433884, -0.781831, 0.974928, -0.974928, 0.781831, -0.433884), \\ \hat{\mathbf{x}} &= (0, 0, 0, -i 0.5, i 0.5, 0, 0).\end{aligned}$$

Recordando que $\text{sen}(2k\pi t) = -0.5 i e^{i2k\pi t} + 0.5 i e^{-i2k\pi t}$, vemos que el vector $\hat{\mathbf{x}}$ contiene información sobre los coeficientes de Fourier de estas señales. Tomemos el caso $x(t) = \text{cos}(4\pi t)$, los cálculos dan como resultado

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (1., -0.222521, -0.900969, 0.62349, 0.62349, -0.900969, -0.222521), \\ \hat{\mathbf{x}} &= (0, 0, 0.5, 0, 0, 0.5, 0).\end{aligned}$$

Observemos que $\text{cos}(2k\pi t) = 0.5 e^{i2k\pi t} + 0.5 e^{-i2k\pi t}$.

Si N es impar, $N = 2n + 1$, y \mathbf{x} es la señal discreta que se obtiene por muestreo de la señal $x(t)$, dada por (7.3), se puede ver analíticamente que el vector transformado es

$$\hat{\mathbf{x}} = (c_0 c_1 \dots c_n c_{-n} \dots c_{-1}).$$

En el caso N par, $N = 2n$, vale

$$\hat{\mathbf{x}} = (c_0 c_1 \dots c_{n-1} a_n c_{-n+1} \dots c_{-1}),$$

recordemos que $a_n = c_n + c_{-n}$.

7.3.4. Propiedades de DFT. Desde un punto de vista algebraico, la transformada discreta de Fourier es una aplicación lineal de \mathbb{C}^N , es decir si $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$, entonces $\hat{\mathbf{z}} = \alpha \hat{\mathbf{x}} + \beta \hat{\mathbf{y}}$. Existe una versión de la identidad de Parseval para la transformada discreta de Fourier:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} |x_j|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{x}_k|^2 = N \|\hat{\mathbf{x}}\|^2.$$

Podemos escribir la identidad anterior de la siguiente forma: si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, entonces $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = N \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}$, donde el producto interno en \mathbb{C}^n se define como

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{j=0}^{N-1} \bar{x}_j y_j$$

Como consecuencia de la identidad de Parseval, vemos que la transformación es inyectiva y por lo tanto inversible. Su inversa es una transformación similar la transformada discreta de Fourier, su expresión es

$$x_j = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k e^{i2\pi jk/N}.$$

Nota: Existen otras parametrizaciones de la transformada discreta de Fourier y su inversa, si p es un número real y q un entero coprimo⁸ con N , entonces

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N^p} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i2\pi qjk/N}, \quad x_j = \frac{1}{N^{1-p}} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k e^{i2\pi qjk/N}.$$

forman un par de transformadas discretas de Fourier, directa e inversa. Salvo aviso en contrario, vamos a considerar $p = 1$ y $q = 1$. Si $p = 1/2$, tanto la transformada directa como la inversa son transformaciones unitarias⁹.

Varias operaciones sobre vectores de \mathbb{C}^N se pueden ver en términos de su transformada. En algunos casos es más simple pensar al espacio \mathbb{C}^N como las sucesiones N -periódicas

$$(\dots x_{N-1} \underbrace{x_0 x_1 \dots x_{N-1}}_{\mathbf{x}} x_0 x_1 \dots),$$

por ejemplo, la rotación hacia la izquierda $\mathbf{y} = \mathbf{L}\mathbf{x} = (x_1 x_2 \dots x_0)$ se expresa como $y_j = x_{j+1}$:

$$(\dots x_0 \underbrace{x_1 x_2 \dots x_0}_{\mathbf{y}} x_1 x_2 \dots).$$

La rotación hacia la derecha $\mathbf{z} = \mathbf{R}\mathbf{x} = (x_{N-1} x_0 \dots x_{N-2})$, equivale a $z_j = x_{j-1}$:

$$(\dots x_{N-2} \underbrace{x_{N-1} x_0 \dots x_{N-2}}_{\mathbf{z}} x_{N-1} x_0 \dots).$$

Claramente, $\sum_{j=0}^{N-1} x_j = \sum_{j=m}^{N+m-1} x_j$ para cualquier m entero. Es fácil ver que $\hat{y}_k = e^{i2\pi k/N} \hat{x}_k$ y $\hat{z}_k = e^{-i2\pi k/N} \hat{x}_k$. Efectivamente,

$$\hat{y}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-i2\pi jk/N} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_{j+1} e^{-i2\pi jk/N},$$

cambiando el índice $j \rightarrow j-1$

$$\hat{y}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i2\pi(j-1)k/N} = e^{i2\pi k/N} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i2\pi jk/N} = e^{i2\pi k/N} \hat{x}_k.$$

Se puede definir la convolución de vectores de \mathbb{C}^N , si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$, definimos $\mathbf{z} = \mathbf{x} * \mathbf{y}$

$$z_j = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x_{j-l} y_l = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^j x_{j-l} y_l + \sum_{l=j+1}^{N-1} x_{N+j-l} y_l,$$

la transformada discreta de Fourier de la convolución está dada por

$$\hat{z}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} z_j e^{-i2\pi jk/N} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} x_{j-l} y_l e^{-i2\pi jk/N},$$

usando $e^{-i2\pi jk/N} = e^{-i2\pi(j-l)k/N} e^{-i2\pi lk/N}$

$$\hat{z}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x_{j-l} y_l e^{-i2\pi(j-l)k/N} e^{-i2\pi lk/N} = \hat{x}_k \hat{y}_k.$$

⁸El máximo común divisor entre q y N es 1.

⁹Una transformación lineal es unitaria si la norma de un vector y el de su transformado valen lo mismo.

Ejemplo 7.7. Tomemos los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^5$ $\mathbf{x} = (-5, 9, -7, 2, 7)$, $\mathbf{y} = (8, -3, -9, 8, -5)$, el vector convolución $\mathbf{z} = \mathbf{x} * \mathbf{y}$ vale $\mathbf{z} = (-36, 15, 1.6, -23.8, 42)$. Sus transformadas son

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= (1.200, 0.798 + i0.678, -3.900 - i1.950, -3.900 + i1.950, 0.798 - i0.678), \\ \hat{\mathbf{y}} &= (-0.200, 1.270 + i1.620, 2.830 - i3.470, 2.830 + i3.470, 1.270 - i1.620), \\ \hat{\mathbf{z}} &= (-0.240, -0.085 + i2.150, -17.800 + i8.010, -17.800 - i8.010, -0.085 - i2.150),\end{aligned}$$

vemos que se verifica $\hat{z}_k = \hat{x}_k \hat{y}_k$. Se puede verificar también $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 5 \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = -23$.

7.3.5. Reconstrucción exacta y solapamiento. Es posible mostrar que si una señal $x(t)$ está dada por (7.3) y $N > 2n$, entonces \hat{x}_k coincide exactamente con c_k . Esto permite la reconstrucción de la señal sin pérdida de información.

Ejemplo 7.8. Consideremos una señal de período 1 dada por (7.3) con $n = 3$, por ejemplo:

$$x(t) = -e^{-6i\pi t} + 2e^{-4i\pi t} + 4e^{-2i\pi t} + 5 - e^{2i\pi t} + 3e^{4i\pi t} - 2e^{6i\pi t},$$

si tomamos $N = 8 > 2n$ y definimos $\mathbf{x} = (x(t_0) x(t_1) \dots x(t_7))$ con $t_j = j\Delta t$ para $j = 0, \dots, 7$ y $\Delta t = 1/8$, obtenemos

$$\mathbf{x} = (10, 9.243 - i3.243, -i4, 0.757 - i5.243, 10, 0.757 + i5.243, i4, 9.243 + i3.243),$$

la transformada de Fourier de \mathbf{x} vale

$$\hat{\mathbf{x}} = (5, -1, 3, -2, 0, -1, 2, 4) = (c_0 c_1 c_2 c_3 0 c_{-3} c_{-2} c_{-1})$$

que recupera los coeficientes de $x(t)$. Como $N > 2n + 1$, aparecen $N - 2n - 1$ ceros.

Vamos a estudiar que sucede si $N \leq 2n$, la muestra $\mathbf{x} = (x(t_0) x(t_1) \dots x(t_{N-1}))$ no es suficiente para recuperar los coeficientes de la señal. En la Figura 7.12 mostramos las señales $x(t) = 1.5 + \cos(2\pi t)$ y $y(t) = 1.5 + \cos(14\pi t)$, si tomamos $N = 8$ vemos que $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, por lo tanto $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}$. Esto muestra que no podemos distinguir entre estas dos señales. Este fenómeno

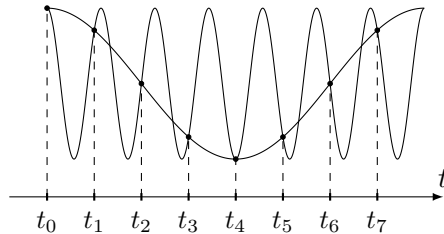


Fig. 7.12: Muestras de $x(t)$, $y(t)$ para $N = 8$.

se conoce como solapamiento (aliasing) y produce distorsiones cuando se digitalizan señales (audio, imágenes, etc.) con baja definición.

Ejemplo 7.9. Si $y(t) = x(t) + e^{-10i\pi t}$, $x(t)$ es la señal del Ejemplo 7.8, es decir

$$y(t) = -e^{-6i\pi t} + 2e^{-4i\pi t} + 4e^{-2i\pi t} + 5 - e^{2i\pi t} + 3e^{4i\pi t} - 2e^{6i\pi t} + 4e^{-10i\pi t},$$

si $N = 8$ y $\mathbf{y} = (y(t_0) y(t_1) \dots y(t_7))$ con $t_j = j\Delta t$ para $j = 0, \dots, 7$ y $\Delta t = 1/8$, obtenemos

$$\mathbf{y} = (14, 6.414 - i0.414, -i8, 3.586 - i2.414, 6, 3.586 + i2.414, i8, 6.414 + i0.414),$$

la transformada de Fourier de \mathbf{y} vale

$$\hat{\mathbf{y}} = (5, -1, 3, 2, 0, -1, 2, 4) = (c_0, c_1, c_2, c_3 + c_{-5}, 0, c_{-3}, c_{-2}, c_{-1}),$$

vemos que en \hat{x}_3 se solapan c_3 y c_{-5} .

Consideremos ahora una señal periódica arbitraria $x(t)$, por lo visto recién si discretizamos con N puntos por período $\mathbf{x} = (x(t_0) x(t_1) \dots x(t_{N-1}))$ la transformada discreta de Fourier $\hat{\mathbf{x}}$ no coincide con los primeros coeficientes de Fourier de $x(t)$, de hecho se puede probar que

$$\hat{x}_k = \dots + c_{k-N} + c_k + c_{k+N} + \dots = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k+lN},$$

de donde obtenemos para $0 \leq k < N/2$

$$\hat{x}_k - c_k = \dots + c_{k-N} + c_{k+N} + c_{k+2N} + \dots = \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} c_{k+lN},$$

$$\hat{x}_{N-k} - c_{-k} = \dots + c_{-k-N} + c_{-k+N} + c_{-k+2N} + \dots = \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} c_{-k+lN}.$$

Podríamos pensar que no hay información sobre c_k en el vector $\hat{\mathbf{x}}$. Pero si suponemos que los coeficientes de Fourier tienden rápidamente a cero, $|c_k| = O(|k|^{-q})$ con $q > 1$, entonces se puede probar que $|\hat{x}_k - c_k|, |\hat{x}_{N-k} - c_{-k}| = O(N^{-q})$, si $0 \leq k < N/2$.

Ejemplo 7.10. Volviendo a la señal triangular del Ejemplo 7.3, vemos que $c_0 = a_0 = 0$ y

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2} & k > 0, \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & k < 0, \end{cases} = \frac{2(1 - (-1)^k)}{\pi^2 k^2}$$

por lo tanto $|c_k| = O(|k|^{-2})$. En la Tabla 7.2 exhibimos las aproximaciones de c_1 , c_7 y c_{-3} mediante la transformada discreta de Fourier para $N = 16, 1024, 16384$. La última columna muestra el comportamiento asintótico de la aproximación.

N	c_1	\hat{x}_1	$ \hat{x}_1 - c_1 $	$N^2 \hat{x}_1 - c_1 $
2^4	0.405 28	0.410 53	5.2487×10^{-3}	1.343 70
2^{10}		0.405 29	1.2716×10^{-6}	1.333 30
2^{14}		0.405 28	4.9671×10^{-9}	1.333 30
N	c_7	\hat{x}_7	$ \hat{x}_7 - c_7 $	$N^2 \hat{x}_7 - c_7 $
2^4	8.2711×10^{-3}	1.6243×10^{-2}	7.9721×10^{-3}	2.040 90
2^{10}		8.2724×10^{-3}	1.2717×10^{-6}	1.333 50
2^{14}		8.2711×10^{-3}	4.9671×10^{-9}	1.333 30
N	c_{-3}	\hat{x}_{N-3}	$ \hat{x}_{N-3} - c_{-3} $	$N^2 \hat{x}_{N-3} - c_{-3} $
2^4	4.5032×10^{-2}	5.0622×10^{-2}	5.5907×10^{-3}	1.431 20
2^{10}		4.5033×10^{-2}	1.2716×10^{-6}	1.333 40
2^{14}		4.5032×10^{-2}	4.9671×10^{-9}	1.333 30

Tabla 7.2: Aproximación de los coeficientes de Fourier por DFT.

7.3.6. Transformada rápida de Fourier.

7.4. Espectro de potencia.

7.4.1. Escala logarítmica.

7.4.2. Decibeles. Es usual expresar G en decibeles, $G(\omega)(\text{dB}) = 20 \log((1 + \omega_1^2 \tau^2)^{-1/2}) = -10 \log(1 + \omega^2 \tau^2)$. El gráficos de $G(\text{dB})$ y ϕ como función de ω en escala semi-logarítmica se llama diagrama de Bode. Los diagramas de Bode correspondientes al circuito 7.6(a) con $\tau = 1 \text{ ms}$ se muestran en la Figura 7.13.

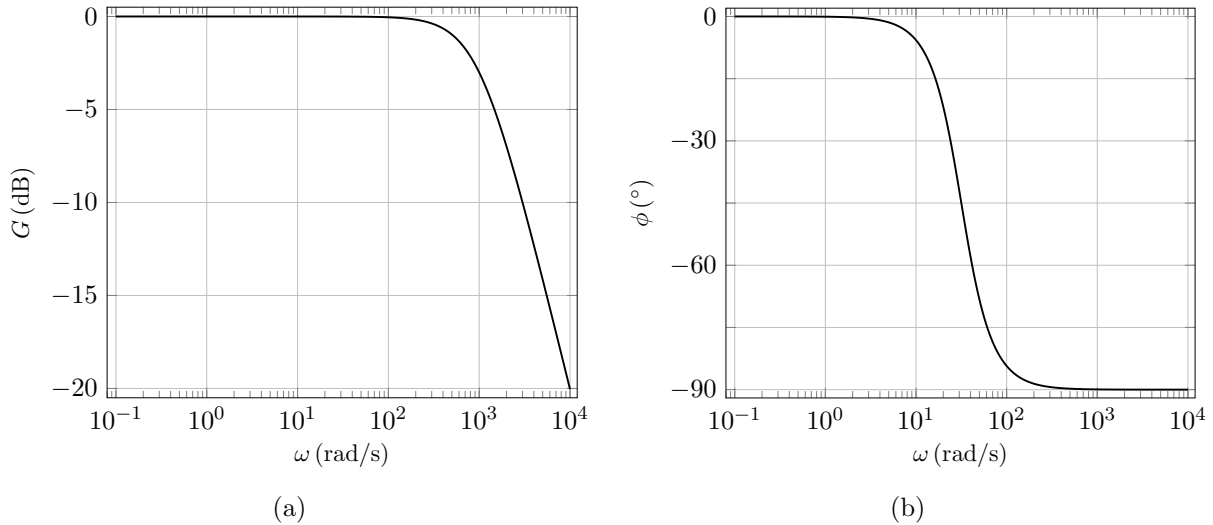


Fig. 7.13: Diagramas de Bode del circuito de la Figura 7.6(a) para $\tau = 1 \text{ ms}$.

7.5. Señales aperiódicas. Muchas señales de interés no presentan comportamiento periódico, nos gustaría ver de qué forma se pueden extender las ideas de Fourier a este caso.

7.5.1. Transformada de Fourier. Vamos a empezar suponiendo que las señales empiezan en un instante y terminan, es decir $x(t) = 0$ si $t \notin (t_i, t_f)$. Consideremos T suficientemente grande de forma que $(t_i, t_f) \subset (-T/2, T/2)$, consideramos las aproximaciones $x_n(t)$ de $x(t)$ dadas por 7.8 en el intervalo $(-T/2, T/2)$. Obviamente $x_n(t)$ es T -periódica, por lo tanto converge a la señal que se obtiene repitiendo $x(t)$ en cada intervalo $((l - 1/2)T, (l + 1/2)T)$ con l entero (ver Figura 7.14). Para $t \in (-T/2, T/2)$ se verifica

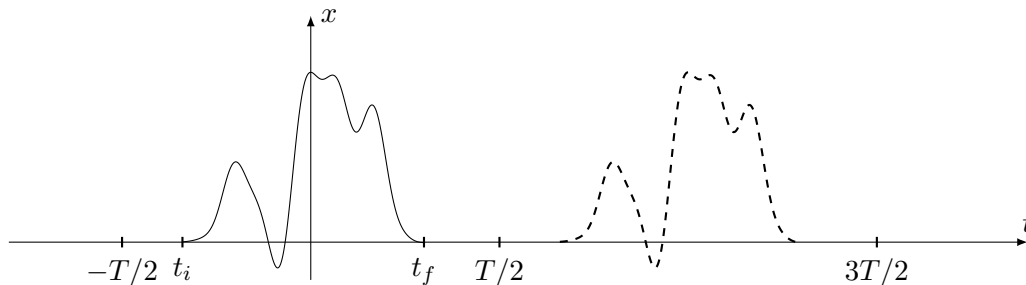


Fig. 7.14

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{i2\pi kt/T} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{e^{i2\pi kt/T}}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t') e^{-i2\pi kt'/T} dt' \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{e^{i2\pi kt/T}}{T} \int_{t_i}^{t_f} x(t') e^{-i2\pi kt'/T} dt'.
 \end{aligned}$$

Si definimos la transformada

$$(7.9) \quad \hat{x}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-i2\pi\nu t'/T} dt' = \int_{t_i}^{t_f} x(t') e^{-i2\pi\nu t'/T} dt',$$

entonces

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{e^{i2\pi t k/T}}{T} \hat{x}(k/T).$$

La suma del lado izquierdo se puede pensar como una aproximación por trapecios de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi t \nu} \hat{x}(\nu) d\nu \cong \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=-n}^n e^{i2\pi t k/T} \hat{x}(k/T).$$

Se convierte en una igualdad cuando $T \rightarrow \infty$, es decir

$$(7.10) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi t \nu} \hat{x}(\nu) d\nu$$

para $t \in \mathbb{R}$. Aunque el razonamiento anterior sea cuestionable desde el rigor matemático, el resultado es absolutamente válido. Observemos que si $y(\nu) = \hat{x}(\nu)$, entonces

$$(7.11) \quad \hat{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi t \nu} \hat{x}(\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(-t)\nu} \hat{x}(\nu) d\nu = x(-t).$$

Es decir, que si calculamos la transformada de Fourier de la transformada de Fourier es equivalente a revertir el tiempo. Si la aplicamos cuatro veces, obtenemos la función original.

Ejemplo 7.11. Si $\chi(t) = 1$ si $t \in (-\tau, \tau)$ y nula fuera de ese intervalo, entonces

$$\hat{\chi}(\nu) = \int_{-\tau}^{\tau} e^{-i2\pi t \nu} dt = \frac{e^{-i2\pi t \nu}}{-i2\pi \nu} \Big|_{t=-\tau}^{t=\tau} = \frac{\text{sen}(2\pi \tau \nu)}{\pi \nu},$$

si definimos la función $\text{sinc}(y) = \text{sen}(y)/y$, entonces $\hat{\chi}(\nu) = 2\tau \text{sinc}(2\pi \tau \nu)$.

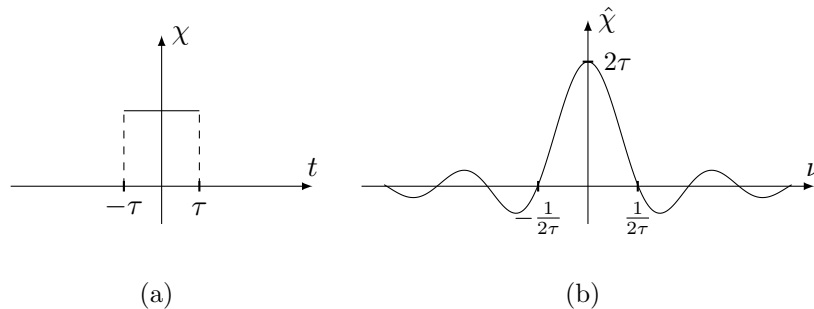


Fig. 7.15

Ejemplo 7.12. Si $\psi(t) = 1 - |t|/\tau$ si $t \in (-\tau, \tau)$ y nula fuera de ese intervalo, entonces

$$\hat{\psi}(\nu) = \int_{-\tau}^{\tau} e^{-i2\pi t \nu} (1 - |t|/\tau) dt = \frac{1 - \cos(2\pi \nu \tau)}{2\pi^2 \nu^2 \tau} = \tau \text{sinc}^2(\pi \nu \tau)$$

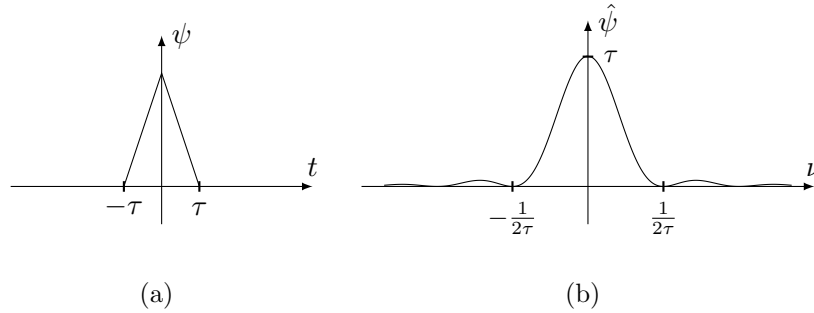


Fig. 7.16

Para los ejemplos anteriores, es difícil calcular (7.10) directamente. Métodos indirectos permiten mostrar la validez de esta igualdad.¹⁰ Pero podemos calcular dicha integral mediante el método de trapecios:

$$\psi(t) \cong \frac{\eta}{N} \sum_{k=-n}^n \hat{\psi}(k\eta/N) e^{i2\pi k\eta t/N},$$

donde η es una frecuencia suficientemente grande como para que podamos considerar $\hat{\psi}(\nu)$ despreciable fuera del intervalo $(-\eta, \eta)$, $N = 2n + 1$. Para $\tau = 1$, tomamos $\eta = 5$ y los tiempos

7.5.2. Propiedades de la transformada de Fourier. Claramente la transformada de Fourier es una operación lineal, esto quiere decir que si $x(t)$ y $y(t)$ son dos señales y $z(t)$ la señal que se obtiene por superposición, $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$), entonces $\hat{z}(\nu) = \alpha \hat{x}(\nu) + \beta \hat{y}(\nu)$. De la definición (7.9) y la fórmula de cambio de variable para integrales, se pueden probar las siguientes afirmaciones:

1. Si $y(t) = x(t - \tau)$, entonces $\hat{y}(\nu) = e^{-i2\pi\nu\tau} \hat{x}(\nu)$.
2. Si $y(t) = e^{i2\pi\eta t} x(t)$, entonces $\hat{y}(\nu) = \hat{x}(\nu - \eta)$.
3. Si $y(t) = x(-t)$, entonces $\hat{y}(\nu) = \hat{x}(-\nu)$.
4. Si $y(t) = \bar{x}(t)$, entonces $\hat{y}(\nu) = \bar{\hat{x}}(-\nu)$.
5. Si $y(t) = x(\lambda t)$, entonces $\hat{y}(\nu) = \lambda^{-1} \hat{x}(\lambda^{-1}\nu)$.

Supongamos que $x(t)$ es derivable y $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$, si $y(t) = \dot{x}(t)$, usando la fórmula de integración por partes vemos

$$\hat{y}(\nu) = \int_{-T}^T \dot{x}(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = x(t) e^{-i2\pi\nu t} \Big|_{t=-T}^{t=T} + i2\pi\nu \int_{-T}^T x(t) e^{-i2\pi\nu t} dt,$$

tomando $T \rightarrow \infty$ obtenemos $\hat{y}(\nu) = i2\pi\nu \hat{x}(\nu)$.

Por otro lado, si aceptamos que se puede intercambiar la derivada con respecto a ν con la integral, vemos que

$$\hat{x}'(\nu) = \frac{d}{d\nu} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = -i2\pi \int_{-\infty}^{\infty} t x(t) e^{-i2\pi\nu t} dt,$$

¹⁰El cálculo de integrales por residuos es el más efectivo.

entonces, si $y(t) = tx(t)$, vale $\hat{x}'(\nu) = -i2\pi\hat{y}(\nu)$. Estas expresiones, muestran que si una señal es varias veces derivable, su transformada de Fourier decae rápido en el infinito. Por otro lado, mientras más rápido decaiga una señal, más suave será su transformada de Fourier.

Consideremos la señal del ejemplo 7.11, $\chi(t)$ decae más rápido que cualquier potencia, es decir $\chi(t) = O(|t|^{-p})$ cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $p > 0$, esto se refleja en su transformada de Fourier, que resulta indefinidamente diferenciable. Pero siendo que $\chi(t)$ no es derivable (solo es continua a trozos), el decaimiento de $\hat{\chi}(\nu) = O(|\nu|^{-1})$ cuando $\nu \rightarrow \infty$. En cambio, la señal $\psi(t)$ del ejemplo 7.12 es continua y derivable a trozos, su transformada de Fourier es también indefinidamente diferenciable y decae como $\hat{\psi}(\nu) = O(|\nu|^{-2})$ cuando $\nu \rightarrow \infty$.

En particular, si una función es indefinidamente derivable y decae más rápido que cualquier potencia, su transformada de Fourier tendrá estas características. Al conjunto de estas funciones se lo conoce como espacio de Schwartz. Por ejemplo, la señal gaussiana $\varphi_a(t) = e^{-at^2}$ verifica estas condiciones, por lo tanto también su transformada. Se puede probar que la transformada de Fourier es también una función gaussiana dada por $\hat{\varphi}_a(\nu) = \sqrt{\pi/a} e^{-\pi^2 t^2/a}$. En la Figura 7.17 se muestra la función gaussiana con dos valores distintos del parámetro $a = \pi, \pi/2$ (Figura 7.17(a)) y sus respectivas transformadas (Figura 7.17(b)).

Para calcular $\hat{\varphi}_a(\nu)$ empecemos con el caso $a = \pi$ ($\varphi_\pi(t) = \varphi(t)$), derivando obtenemos

$$\ddot{\varphi}(t) - 4\pi^2 t^2 \varphi(t) + 2\pi \varphi(t) = 0,$$

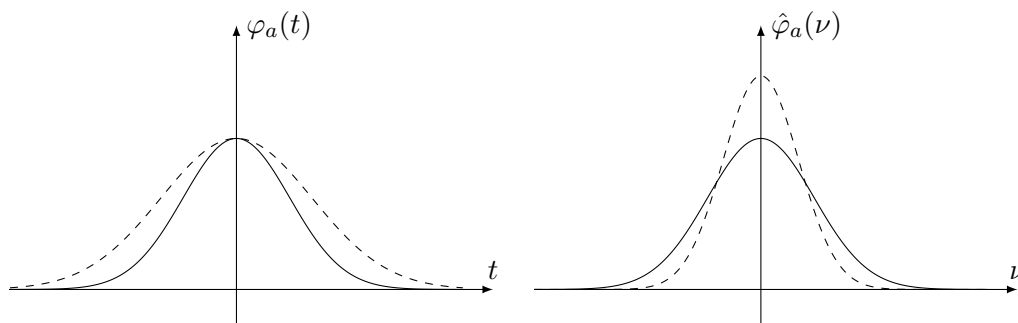
calculando la transformada de Fourier de cada término, resulta

$$-4\pi^2 \nu^2 \hat{\varphi}(\nu) + \hat{\varphi}''(\nu) + 2\pi \hat{\varphi}(\nu) = 0.$$

Sabemos de la teoría de ecuaciones diferenciales, que el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial lineal de segundo orden es un espacio vectorial de dimensión dos. Recordemos que dos funciones son linealmente independientes si y solo si el wronskiano, $w(t) = \dot{y}_1(t)y_2(t) - y_1(t)\dot{y}_2(t)$ no es idénticamente nulo. Pero si $y_1(t), y_2(t)$ son soluciones de $\ddot{y}(t) + V(t)y(t) = 0$, $w(t)$ es constante ($\dot{w}(t) = 0$). Como $\varphi(t), \hat{\varphi}(t)$ y sus derivadas tienden a 0 cuando $t \rightarrow \pm\infty$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$, siendo constante $w(t) = 0$ para todo t . Por lo tanto, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\hat{\varphi}(t) = c\varphi(t)$. Aplicando transformada de Fourier a esta última igualdad, se deduce $\varphi(-t) = c^2\varphi(t)$ y, como $\varphi(t)$ es una función par, tenemos $c = \pm 1$. Usando que $\varphi(0) = 1$ obtenemos

$$c = c\varphi(0) = \hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt > 0,$$

por lo tanto $c = 1$. Para $a > 0$, podemos tomar $\lambda = \sqrt{a/\pi}$ y $\varphi_a(t) = e^{-at^2} = \varphi(\lambda t)$. Por lo tanto, su transformada de Fourier es $\hat{\varphi}_a(\nu) = \sqrt{\pi/a} e^{-\pi^2 t^2/a}$.



(a) $\varphi_a(t)$, $a = \pi$ y $a = \pi/2$.

(b) $\hat{\varphi}_a(\nu)$, $a = \pi$ y $a = \pi/2$.

Fig. 7.17

7.5.3. Convolución de señales aperiódicas. Igual que en el caso periódico, podemos definir la operación de convolución entre señales. Si tomamos la convolución definida en este

caso como $z(t) = (x * y)(t)$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t')y(t')dt',$$

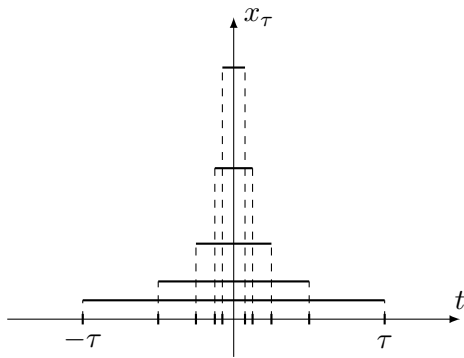
vemos que se verifican todas las propiedades del caso periódico. También para la transformada de Fourier, se verifica $\hat{z}(\nu) = \hat{x}(\nu)\hat{y}(\nu)$. Si para $\tau > 0$, tomamos la señal $x_\tau(t)$ dada

$$x_\tau(t) = \begin{cases} \tau^{-1} & t \in (-\tau/2, \tau/2), \\ 0 & t \notin (-\tau/2, \tau/2), \end{cases}$$

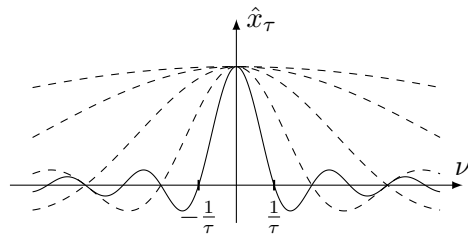
entonces podemos probar que $z(t) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} y(t)$. En efecto, la diferencia $z(t) - y(t)$ se puede escribir

$$|z(t) - y(t)| \leq \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} |y(t') - y(t)| dt' \leq \max_{|t'-t| \leq \tau/2} |y(t') - y(t)| \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0.$$

En forma equivalente, por lo visto en el ejemplo 7.11, $x_\tau(\nu) = \text{sinc}(\pi\tau\nu) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 1$, de donde se deduce $\hat{z}(\nu) \rightarrow \hat{y}(\nu)$. A este proceso límite se le puede asignar el objeto $\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} x_\tau(t)$, que si bien no es una función, se puede operar como si lo fuera, se la denomina *función delta de Dirac*.¹¹ Extendemos la noción de transformada a la función delta de Dirac tomando $\hat{\delta} = 1$, en la Figura 7.18 mostramos el paso al límite, en la Figura 7.18(a) se grafica $x_\tau(t)$ para $\tau \rightarrow 0$ y en 7.18(b) sus transformadas $\hat{x}(\nu)$. Si definimos $\delta_\tau(t) = \delta(t - \tau)$, vemos que $(\delta_\tau * x)(t) = x(t - \tau)$



(a) Aproximaciones a la delta de Dirac.



(b) Aproximaciones a la función 1.

Fig. 7.18: Función delta de Dirac y su transformada.

y $\hat{\delta}_\tau(\nu) = e^{-i2\pi\tau\nu}$. Podemos ver

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \delta_\tau(t), & \hat{\psi}(\nu) &= e^{-i2\pi\tau\nu}, \\ \psi(t) &= \frac{\delta_\tau(t) + \delta_{-\tau}(t)}{2}, & \hat{\psi}(\nu) &= \cos(2\pi\tau\nu), \\ \psi(t) &= \frac{\delta_\tau(t) - \delta_{-\tau}(t)}{i2}, & \hat{\psi}(\nu) &= -\text{sen}(2\pi\tau\nu). \end{aligned}$$

¹¹Para darle sentido la delta de Dirac hay que considerar la teoría de distribuciones.