

## Práctica 9

### Transformadas de Fourier y Laplace y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales

---

#### Notaciones y definiciones

★  $G(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / f \text{ es continua a trozos, con derivadas laterales finitas en todo punto y absolutamente integrable en } \mathbb{R}\}$

★  $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx} dt \quad f \in G(\mathbb{R})$

★  $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt \quad f, g \in G(\mathbb{R})$

---

#### Transformada de Fourier

1. Calcular la transformada de Fourier de las siguientes funciones de  $L^1$

a)  $e^{-|x|}$

b)  $\frac{1}{1+x^2}$

c)  $e^{-ax^2}$

d)  $\begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} (a > 0)$

e)  $\begin{cases} 0 & |x| > A \\ 1 & |x| < A \end{cases}$

f)  $\begin{cases} 1 & 0 \leq x < a \\ 0 & x \notin [0, a) \end{cases}$

2. Sean  $f, g \in G(\mathbb{R})$ . Probar las siguientes propiedades de la convolución:

a)  $f * g = g * f$

b)  $f * (g * h) = (f * g) * h$

c)  $\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) dt = \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \right)$

3. Sea  $f \in G(\mathbb{R})$ . Probar:

a)  $g(x) = e^{iax} f(x) \Rightarrow g \in L^1 \text{ y } \hat{g}(t) = \hat{f}(t - a)$

b)  $g(x) = f(x + a) \Rightarrow g \in L^1 \text{ y } \hat{g}(t) = e^{iat} \hat{f}(t)$

c)  $g \in G(\mathbb{R}) \Rightarrow \widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$

d)  $g(x) = \overline{f(-x)} \Rightarrow \hat{g} = \overline{\hat{f}}$

e)  $g(x) = f\left(\frac{x}{a}\right), a > 0 \Rightarrow \hat{g}(t) = a \hat{f}(at)$

f)  $g(x) = -ixf(x)$  y  $g \in L^1 \Rightarrow \hat{f}$  es derivable y  $\hat{f}' = \hat{g}$

g)  $f^{(n)} \in C^n \Rightarrow \widehat{f^{(n)}}(t) = (it)^n \hat{f}(t)$

h)  $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Re}(\hat{f})$  es par e  $\operatorname{Im}(\hat{f})$  es impar.

i)  $g(x) = f(ax + b)$ ,  $a \neq 0 \Rightarrow \hat{g}(t) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{ibt}{a}} \hat{f}\left(\frac{t}{a}\right)$

j)  $g(x) = f(x) \cos(ax) \Rightarrow \hat{g}(t) = \frac{\hat{f}(t+a) + \hat{f}(t-a)}{2}$

k)  $g(x) = f(x) \operatorname{sen}(ax) \Rightarrow \hat{g}(t) = \frac{\hat{f}(t-a) - \hat{f}(t+a)}{2i}$

l)  $f$  continua y  $\hat{f} \in G(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}(x) = 2\pi f(-x)$

4. Sea  $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

a) Comprobar que  $\hat{f}(t) = 2 \frac{\operatorname{sen} t}{t}$ .

b) Verificar que:

i)  $h(x) = \begin{cases} 1 & x \in [c, d] \\ 0 & x \notin [c, d] \end{cases} = f\left(\frac{2}{d-c}x + \frac{d+c}{d-c}\right)$

ii)  $k(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & x \in [0, \pi] \\ 0 & x \notin [0, \pi] \end{cases} = \operatorname{sen} x f\left(\frac{2}{\pi}x - 1\right)$

c) Calcular  $\hat{h}$  y  $\hat{k}$  usando el ejercicio 3.

5. Calcular las transformadas de Fourier de las siguientes funciones de  $L^1$ .

a)  $e^{-a(x-b)^2}$  ( $a > 0, b \in \mathbb{R}$ )      b)  $e^{-x^2} \operatorname{sen}(ax)$       c)  $\frac{1}{x^2 + a^2}$

6. Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones de  $L^2$ .

a)  $\frac{x}{x^2 + 1}$       b)  $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$       c)  $\frac{x^3}{1 + x^4}$   
d)  $\frac{x^3}{(x^2 + 1)^2}$       e)  $\frac{x}{x^2 + x + 1}$       f)  $\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}$  ( $a > 0$ )

• Sean  $f, g \in L^2$ , continuas a trozos. Se tienen las siguientes propiedades:

a)  $f \pm g, f \pm ig \in L^2$ .

b) i)  $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f} \pm \hat{g}|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f \pm g|^2 dt$

ii)  $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f} \pm i\hat{g}|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f \pm ig|^2 dt$

c) Identidad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\overline{\hat{g}(t)} dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt$$

7. Usando la identidad de Parseval, calcular las siguientes integrales.

a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$       b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1 - e^{-ita}}{it} \right|^2 dt, (a > 0)$       c)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(at) \sin(bt)}{t^2} dt$

8. Hallar las transformadas inversas de Fourier de:

a)  $\frac{\sin(au)}{u}$       b)  $\frac{1 - \cos(au)}{u}$       c)  $e^{-u^2}$       d)  $\frac{u}{u^2 + 1}$

9. a) Hallar la transformada inversa de Fourier de:  $g(u) = \frac{1}{(u^2 + 1)^2}$  interpretándola como la transformada de una convolución.

b) Hallar la transformada de Fourier de  $f(x) = \int_{-\infty}^x e^{-(x-y)}g(y) dy$ , en función de  $\hat{g}$ .

• **Regla de Leibniz**

Sea  $\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  continua y  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $g(t) = \int_a^b \varphi(s, t) ds$ .

Entonces:

a)  $g$  es continua.

b) Si  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  es continua en  $[a, b] \times [c, d]$  entonces  $g$  es  $C^1$  y  $g'(t) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) ds$

10. Resolver transformando Fourier en la variable  $x$

a)  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad u(x, 0) = e^{-x^2}$

b)  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad u(x, 0) = e^{-x^2}$

c)  $\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} = u \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad u(x, 0) = 6 e^{-3x} h(x) \quad h(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

d)  $\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad u(x, 0) = \frac{1}{1 + x^2}$

11. **Función Gama**

La función  $\Gamma : \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

se llama *función Gama*.

- a) Probar que:  
 \*  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .  
 \*  $\Gamma(n) = (n-1)!$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- b) Dado  $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$  tal que  $\operatorname{Re}(z) < 0$  se define:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}$$

si  $n \in \mathbb{N}$  y  $\operatorname{Re}(z+n) > 0$ . Mostrar que la definición no depende del  $n \in \mathbb{N}$  elegido.

- c)† Probar que  $\Gamma(z)$  converge uniformemente en toda banda vertical de la forma  $0 < \epsilon \leq \operatorname{Re}(z) \leq M$ .  
 Deducir de c) y de b) que  $\Gamma$  es holomorfa en  $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_{\leq 0}$ .

### Transformada de Laplace

12. Hallar la transformada de Laplace de:

a)  $\sin x$

b)  $x^3$

c)  $(x+b)^2$

13. Para  $s > 0$  y  $p > -1$ , probar que:  $\mathcal{L}(t^p)(s) = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$

14. Hallar la transformada inversa de Laplace de:

a)  $s^{-2}$

b)  $s^{-\frac{1}{2}}$

c)  $(s^2 - a^2)^{-1}$

d)  $\frac{e^{-as}}{s^2}$

e)  $\frac{1}{s^2 + s + 2}$

f)  $\frac{e^{-3s}}{s^2 + s + 2}$

g)  $(s-2)^{-\frac{1}{2}}$

h)  $\frac{4-5s}{s^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{s^2 + 2s}$

i)  $\frac{2s+3}{s^2 - 4s + 20}$

j)  $\log(1+s^{-1})$

k)  $\log\left(\frac{s+6}{s+2}\right)$

15. a) Hallar  $f$  tal que:

(i)  $f(t) = \int_0^t f(t-u)e^u du + \operatorname{ch}(t)$

(ii)  $f(t) = 1 + \int_0^t f(t-u)\operatorname{sen}(t-u) du$

b) Calcular  $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right)(t)$

c) Probar que  $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}}\right)(t) = \frac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}$ ,  $s, t > 0$ .

16. Resolver, para  $x > 0$ :

- a)  $u'' + 2u' + u = e^{-x}$  con:  $u(0) = u'(0) = 0$   
b)  $u'' + u' + u = \sin x$  con:  $u(0) = 0, u'(0) = 1$   
c)  $x u'' + u' + x u = 0$  con:  $u(0) = 1, u'(0) = 0$

**Nota:** en c) hallar solo la transformada de Laplace de  $u$ .

17. Transformando Laplace, hallar  $u(x, t)$  de clase  $\mathcal{C}^1$  y de orden exponencial respecto de  $t$ , definida para  $(x, t) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ , solución de la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - 4 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0$$

$$u(x, 0) = 2e^{-3x}.$$

*Sugerencia:* Recordar que si  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es de orden exponencial,  
 $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$ .

18. Transformando Laplace, hallar  $u(x, t)$  solución de:

a)  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + 2u(x, t) = 0$

$$u(x, 0) = 10e^{-x} - 6e^{-4x}$$

b)  $y'(t) + 7 \int_0^t \cos(3t - 3\tau)y(\tau)d\tau = 1 \quad (t \geq 0)$

$$y(0) = 2$$