Práctica 1
Introducción a los números complejos

---

1. Representar gráficamente los números: z, w, $z+w$, $z-w$, $\overline{z}$, $\overline{w}$, zw, para:

   a) $z = 2i, w = \frac{3}{2} - i$

   b) $z = -\sqrt{3} + i, w = \sqrt{3}$

2. **a)** Sea $z \in \mathbb{C}$, probar:

   i) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad , \quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

   ii) $2|\operatorname{Re}(z)||\operatorname{Im}(z)| \leq |z|^2$

   iii) $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$

   iv) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ si $z \neq 0$

   v) $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

   b) Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, probar que:

   i) $|z_1||z_2| \geq \frac{1}{2}(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2)$

   ii) $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

   iii) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

3. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos:

   a) $3 + \sqrt{3}i$

   b) $(-1-i)^{-1}$

   c) $(2+2i)(\sqrt{3} - i)$

   d) $(-1-\sqrt{3}i)^5$

4. Resolver las siguientes ecuaciones:

   a) $|z| - z = 1 + 2i$

   b) $z.\overline{z} - 2|z| + 1 = 0$

   c) $z^6 + 2 = 0$

   d) $z^4 - 1 - i = 0$

5. **a)** Probar la fórmula de resolución de las ecuaciones de segundo grado:

$$az^2 + bz + c = 0$$

   donde $a, b, c \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$

b) Resolver: $z^2 - (2i+4)z + 10i - 5 = 0$

6. Probar que si $c \in \mathbb{R}_{>0}$, la ecuación $|z-1| = c|z+1|$ representa una circunferencia o una recta.

   Representar gráficamente: $|z-3| = 2|z+3|$ y $|z-3| < 2|z+3|$

7. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$, probar que $\alpha z\overline{z} + cz + \overline{cz} + \beta = 0$ representa una circunferencia, una recta, un punto o el conjunto vacío y probar que toda circunferencia o recta puede escribirse de esta forma.

8. **a)** Dadas las funciones

   $t(z) = z + c$, $c \in \mathbb{C}$ fijo (traslación)

   $h(z) = a(z - z_0) + z_0$, con $a \in \mathbb{C}_{\neq 0}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ (homotecia de centro z_0 y razón a

   $i(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$ (inversión)

   describirlas geométricamente. ¿Cuál es la imagen, por cada una de ellas, de una circunferencia y de una recta?

   b) Probar que $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tales que $ad - bc \neq 0$ (homografía) se escribe como composición de funciones del tipo de las dadas en **a)**. Deducir cuál es la imagen por f de una circunferencia o de una recta.

   c) Verificar que $g(z) = \dfrac{dz - b}{-cz + a}$ es la homografía inversa de $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

9. Determinar la imagen de las siguientes regiones bajo la homografía indicada:

   a) el cuadrante $\{z : \mathrm{Re}(z) > 0 \text{ e } \mathrm{Im}(z) > 0\}$ por $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$.

   b) el medio-disco $\{z : \mathrm{Im}(z) > 0 \text{ y } |z| < 1\}$ por $f(z) = \dfrac{2z-i}{2+iz}$.

10. Describir geométricamente la región determinada por cada una de las siguientes condiciones.

    Decidir si son abiertas o cerradas y si son o no conexas.

a) $\lvert\mathrm{Im}(z)\rvert > 1$	**b)** $\mathrm{Re}(z - iz) \leq 2$	**c)** $\lvert z - 1 + 3i\rvert \leq 1$
d) $-\pi < \mathrm{Arg}(z) < \pi$, $\lvert z\rvert > 2$	**e)** $\lvert z - 4\rvert > 3$	**f)** $1 < \lvert z - 2i\rvert \leq 2$
g) $0 \leq \mathrm{Arg}(z^2) \leq \frac{\pi}{4}$ $(z \neq 0)$	**h)** $\mathrm{Im}(z^2) > 0$	**i)** $\mathrm{Re}(\frac{1}{z}) < \frac{1}{2}$