Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Dto. de Matemática

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Segundo Cuatrimestre 2020

Práctica N° 2: Análisis cualitativo.

1. Analizar gráficamente las siguientes ecuaciones. Cuando sea posible, resolverlas analíticamente:

   (a) $\dot{y} = 1 - 2\cos(y)$

   (b) $\dot{y} = 1 - y^{1}0$

   (c) $\dot{y} = e^{-y}\operatorname{sen}(y)$

   (d) $\dot{y} = e^{y} - \cos(y)$

2. Para cada una de las ecuaciones del ejercicio anterior, estudiar el valor de f' en los puntos fijos. Comparar con la estabilidad en cada punto.

3. La propagación de una acción en una población grande (por ejemplo, seguir una moda) a veces depende sólo parcialmente de la tendencia humana de imitar lo que los otros hacen. En este caso el incremento de la proporción $y(t)$ de población que ha realizado tal acción puede expresarse por la fórmula

$$y' = (1 - y)(s(t) + Iy),$$

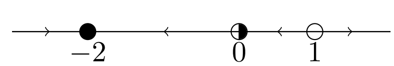
   donde $s(t)$ mide el estímulo externo e I es una constante llamada coeficiente de imitación.

   (a) Interpretar el sentido de la ecuación.

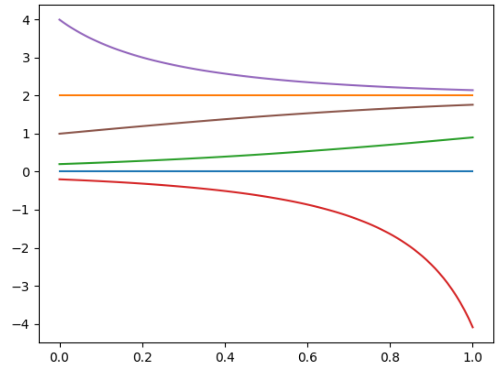
   (b) Asumiendo $s(t) = at$, hallar los puntos fijos de la ecuación, y estudiar su estabilidad.

   (c) Hacer un gráfico aproximado de la solución para distintos datos iniciales $y_0 \in [0, 1]$

4. Dado el siguiente flujo, deducir una ecuación que se ajuste a él (un nodo lleno indica un equilibrio estable, y un nodo vacío, uno inestable):



5. La siguiente figura muestra soluciones de una ecuación para distintos datos iniciales. Dar una ecuación que se ajuste al gráfico.



6. Un tanque contiene 50 litros agua salada con una concentración x_0. El tanque tiene una canilla abierta por la que sale agua a razón de 5 litros por minuto. Simultáneamente, ingresan otros 5 litros por minuto de agua salada con una concentración a.

   (a) Escribir la ecuación diferencial que describe la evolución de la concentración x de sal en función del tiempo.

   (b) Hallar puntos fijos y analizar su estabilidad.

7. Considerar el modelo de reacción química

$$\mathrm{A} + \mathrm{X} \underset{\mathrm{k}_{-1}}{\overset{\mathrm{k}_1}{\rightleftarrows}} 2\,\mathrm{X},$$

   en el que cada molécula de X se combina con una de A para formar dos de X, al tiempo que también ocurre la reacción inversa (en la que dos moléculas de X retornan a una de A y una de X). La ley de acción de masa dice que la tasa de una reacción química es proporcional al producto de las concentraciones de las substancias que reaccionan. Las constantes de proporcionalidad de cada reacción se indican sobre las flechas (k_1 para la reacción directa, k_{-1} para la inversa). Suponiendo que existe una gran cantidad de moléculas de A, podemos suponer su concentración a constante.

   (a) Escribir la ecuación diferencial que rige la dinámica de la concentración x de X.

   (b) Encontrar los puntos fijos y clasificar su estabilidad.

   (c) Implementar un programa que grafique la solución para distintos valores iniciales x_0.

8. Un potencial para $f(x)$ es una función V que satisface $-V'(x) = f(x)$. Para cada una de las siguientes ecuaciones, calcular el potencial y estudiar el comportamiento de las soluciones para distintos datos iniciales a partir de él.

(a) $\dot{x} = x(3 - x)$

(b) $\dot{x} = ln(x)$

(c) $\dot{x} = xe^{-x}$

(d) $\dot{x} = \operatorname{sen}(x)$

9. Deducir de la existencia de potencial que la ecuación $\dot{x} = f(x)$ no admite soluciones periódicas.

10. La velocidad de un objeto en caída libre se rige por la ecuación $m\dot{v} = mg - \gamma v^2$, donde m es la masa del objeto, $g = 98.1\text{m/s}^2$ es la aceleración gravitatoria y γ es una constante debida a la resistenca del aire (depende del medio y de la geometría del objeto).

    (a) Hacer un análisis gráfico del problema y hallar la *velocidad terminal*.

    (b) Resolver la ecuación y calcular el $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

    (c) Una bala de cañón de masa 16Kg cae de la Torre de Pisa (55.8 mts) en 3.39 segundos. Implementar un programa que utilice un argumento de bisección para estimar la constante γ para la bala de cañón. (Sug.: usar la función `scipy.integrate.odeint` en `Python`, o la función `ode45` en `Matlab` y `Octave`).

11. Considerar la ecuación $\dot{x} = -\sqrt{x}$ para $x \geq 0$. Hallar puntos de equilibrio. ¿Cuánto tiempo tarda una solución en alcanzar el equilibrio?

12. Probar que cualquier solución de $\dot{x} = 1 + x^2$ “explota”. Es decir: tiende a infinito en tiempo finito. Deducir que lo mismo ocurre para las soluciones de $\dot{x} = 1 + x^1 0$