Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Segundo Cuatrimestre 2020

Práctica N° 1: Métodos de Resolución

1. **Separación de Variables.** Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, encontrar la solución general y la particular que satisfaga la condición dada:

   (a) $y' = \dfrac{1+y}{1+x}$, $y(0) = 1$,

   (b) $y' - 2xy = x$, $y(1) = 0$,

   (c) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(1) = 0$,

   (d) $(1+x^2)y' + e^{-y} = 0$, $y(0) = 0$,

   En todo los casos de el dominio de definición de la solución.

2. Comprobar que la sustitución $v = ax + by + c$ transforma la ecuación

$$y' = f(ax + by + c)$$

   en otra de variables separadas. Aplicar este método para resolver

   (a) $y' = (x+y)^2$,

   (b) $y' = \operatorname{sen}^2(x - y - 1)$.

3. **Ecuaciones homogéneas**. Resolver las siguientes ecuaciones:

   (a) $x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0$,

   (b) $x\operatorname{sen}\left(\dfrac{y}{x}\right)y' = y\operatorname{sen}\left(\dfrac{y}{x}\right) + x$,

   (c) $xy' = y + 2xe^{\frac{-y}{x}}$,

   (d) $xy' = y + (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$,

4. Dada la ecuación

$$y' = F\left(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right).$$

   (a) Si $ae \neq bd$, encontrar constantes h, k tales que el cambio de variables $x = z - h$, $y = w - k$ transforma la ecuación anterior en otra homogénea.

   (b) Si $ae = bd$, encontrar un cambio de variables que reduzca la ecuación anterior a una de variables separadas.

   (c) Aplicar el método anterior en los siguientes ejemplos:

i. $y' = \dfrac{x+y+4}{x-y-6}$, ii. $y' = \dfrac{x+y+4}{x+y-6}$, iii. $y' = \dfrac{2x+3y-1}{4x+4}$.

5. Utilizar el cambio de variables $y = zx^r$, $r \in \mathrm{R}$, para resolver

   (a) $y' = \dfrac{2+3xy^2}{4x^2y}$, (b) $y' = \dfrac{y-xy^2}{x+x^2y}$.

6. **Ecuaciones exactas y Factor integrante.**

   (a) $(6xy - y^3)dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)dy = 0$,
   (b) $(1 + ye^{xy}) + (2y + xe^{xy})y' = 0$,
   (c) $(4x + 3y^3)dx + 3xy^2dy = 0$,
   (d) $(7x^4y - 3y^8) + (2x^5 - 9xy^7)y' = 0$, (Sug.: hallar un factor integrante $\mu = x^ny^m$),
   (e) $(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0$, (Sug.: hallar un factor integrante $\mu = \mu(x + y^2)$).

7. (a) Dada la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, demostrar que si $\frac{N_x - M_y}{M}$ es una función que solo depende de la variable y entonces

$$\rho(y) = \exp\left(\int \frac{N_x - M_y}{M} dy\right)$$

   es un factor integrante.

   (b) Probar un resultado análogo para un factor integrante que dependa sólo de x y para uno que dependa sólo de $x^2 + y^2$.

   (c) Resolver

   i. $y^2 \cos x + (y + 5y\operatorname{sen} x)y' = 0$,
   ii. $y^2 \cot x \; dx + 2y \; dy = 0$,

8. Comprobar que la ecuación diferencial

$$\left(y + xf\left(x^2 + y^2\right)\right) dx + \left(yf\left(x^2 + y^2\right) - x\right) dy = 0$$

   en general no es exacta, pero admite un factor integrante de la forma $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

9. **Ecuaciones lineales de primer orden.** Resolver las siguientes ecuaciones

   (a) $y' + y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$,
   (b) $xy' = 2y - x^3$,

(c) $(1+x^2)y' + 2xy = \dfrac{1}{\tan x}$.

10. Resolver las siguientes **ecuaciones de tipo Bernoulli**:

(a) $xy' + y = x^4y^3$,

(b) $xy^2y' + y^3 = x\cos(x)$,

(c) $xy' + y = xy^2$.

11. (a) Demostrar que las ecuaciónes del tipo

$$y' + P(x)y = Q(x)y\ln y$$

se resuelven mediante la sustitución $z = \ln y$.

(b) Resolver $xy' = 2x^2y + y\ln y$.

12. La ecuación

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = f(x) \tag{1}$$

es conocida como la **ecuación de Ricatti**.

(a) Mostrar que si y_1 e y_2 son 2 soluciones de la ecucion (1), entonces la $z = y_1 - y_2$ es solución de la ecuación de Bernoulli

$$z' + (P + 2y_2Q)z + Qz^2 = 0.$$

(b) Sabiendo que $y = x$ es una solución de la ecuación de Ricatti

$$y' + x^3y - x^2y^2 = 1$$

determinar las demás soluciones.

13. (a) Mostrar que si y_1 e y_2 son dos soluciones de (1), entonces su solución general está dada por

$$y - y_1 = c(y - y_2)\exp\left(\int Q(y_2 - y_1)\right).$$

(b) Obtener la solución general de

$$y' - y\tan x - y^2\cos x = -\frac{1}{\cos x}$$

sabiendo que $y_1 = \dfrac{1}{\cos x}$ e $y_2 = -\dfrac{1}{\cos x}$ son soluciones.