

# Ecuaciones Diferenciales A/B – 1º cuatrimestre 2020

## ESPACIOS DE SOBOLEV

**Ejercicio 1.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y sean  $u, v \in W^{k,p}(U)$ ,  $|\alpha| \leq k$ . Entonces:

1.  $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$  y  $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$  para todo par de multiíndices  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$  tales que  $|\alpha| + |\beta| \leq k$ .
2. Para cada  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$  y  $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$ .
3. Si  $V \subset U$ , entonces  $u \in W^{k,p}(V)$ .
4. Si  $\zeta \in C_c^\infty(U)$ , entonces  $\zeta u \in W^{k,p}(U)$  y

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u.$$

**Ejercicio 2.** Probar que en cada clase de  $W^{k,p}(U)$  existe a lo sumo una función continua.

**Ejercicio 3.** Sea  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  un intervalo.

1. Probar que si  $u \in W^{1,p}(I)$ ,  $1 \leq p < \infty$  entonces  $u \in AC(I)$ .
2. Probar que si  $u \in W^{1,p}(I)$ ,  $p > 1$ , entonces

$$|u(x) - u(y)| \leq \left( \int_a^b |u'(t)|^p dt \right)^{1/p} |x - y|^{1-\frac{1}{p}}.$$

**Ejercicio 4.** Sea  $f \in H^1(\mathbb{R})$ , probar que  $h^{-1}(\tau_h f - f)$  converge a  $f'$  en  $L^2(\mathbb{R})$  cuando  $h \rightarrow 0$ , donde  $\tau_h f(x) = f(x+h)$ .

Sugerencia: escribir  $h^{-1}(\tau_h f - f)$  como  $f' * \varphi_h$ .

**Ejercicio 5.** Sea  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  un intervalo.

1. Probar que existe una constante  $C$  tal que para toda  $f \in H^1(I)$ ,

$$|f(x)| \leq C \|f\|_{1,2}.$$

2. Probar que existe una constante  $C$  tal que para toda  $f \in H_0^1(I)$ ,

$$|f(x)| \leq C \|f'\|_2.$$

3. Concluir que  $\|f'\|_2$  es una norma equivalente a  $\|f\|_{1,2}$  en  $H_0^1(I)$ .
4. Mostrar que el ítem 1 es falso en  $U \subset \subset \mathbb{R}^2$ .
5. Usando el teorema de Arzelà-Ascoli, probar que un conjunto acotado de  $H^1(I)$  es precompacto en  $C(\bar{I})$ , y por lo tanto en  $L^2(I)$ .

**Ejercicio 6.** Sea  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  un intervalo acotado y sea  $f \in L^2(I)$ . Probar que  $f \in H^1(I)$  si y sólo si

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\hat{f}(k)|^2 < \infty,$$

donde  $\hat{f}(k)$  son los coeficientes del desarrollo de  $f$  en serie de Fourier.

**Ejercicio 7.** Sea  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  un intervalo acotado y sea  $f \in H^1(I)$ . Sea  $\{I_j\}_{j \in J}$  una colección de intervalos disjuntos en  $I$ ,  $I_j = (a_j, b_j)$ . Probar que

$$\sum_{j \in J} |f(b_j) - f(a_j)| \leq \|f\|_{1,2} \left( \sum_{j \in J} |b_j - a_j| \right)^{1/2}.$$

Concluir que  $H^1(I) \subset VA(I)$ .

**Ejercicio 8.** Sea  $u \in W^{k,p}(U)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Definimos  $u^\varepsilon := \rho_\varepsilon * u$  en  $U_\varepsilon$ , donde  $\rho$  es el núcleo regularizante,  $\rho_\varepsilon$  las aproximaciones de la identidad y

$$U_\varepsilon := \{x \in U : \text{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}.$$

Entonces:

1.  $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$ , para cada  $\varepsilon > 0$ .
2.  $u^\varepsilon \rightarrow u$  en  $W_{\text{loc}}^{k,p}(U)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Ejercicio 9.** Sea  $U$  abierto y acotado. Probar que si  $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$  entonces

$$\int_U |Du|^2 dx \leq C \left( \int_U |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_U |\Delta u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Concluir que en  $H_0^2(U)$ ,  $\|\Delta u\|_2$  es una norma equivalente a la usual.

**Ejercicio 10.** Sea  $u \in W^{1,p}(U)$  tal que  $\nabla u = 0$  en casi todo punto de  $U$ . Probar que  $u$  es constante en cada componente conexa de  $U$ .

**Ejercicio 11.** Mostrar que las conclusiones del teorema de compacidad de Rellich–Kondrachov se mantienen si en lugar de asumir que  $U \subset \mathbb{R}^n$  es acotado se asume que  $|U| < \infty$ .

**Ejercicio 12** (Desigualdad de Poincaré). Sea  $U$  un abierto conexo y acotado de  $\mathbb{R}^n$  con frontera de clase  $C^1$ . Probar que existe una constante  $C > 0$  que depende sólo de  $n$  y  $U$  tal que

$$\|u - (u)_U\|_2 \leq C \|\nabla u\|_2$$

para cada  $u \in H^1(U)$ , donde

$$(u)_U := \int_U u dx.$$

Sugerencia: Razonar por el absurdo y usar la compacidad de la inclusión  $W^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$ .

**Ejercicio 13.** Sea  $\alpha > 0$ . Probar que existe una constante  $C > 0$  que depende sólo de  $\alpha$  y de la dimensión del espacio, tal que

$$\int_U u^2 dx \leq C \int_U |\nabla u|^2 dx,$$

para toda  $u \in H^1(U)$  tal que  $|\{x \in U : u(x) = 0\}| \geq \alpha$ .

**Ejercicio 14.** Sea  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  con  $F'$  acotada. Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto acotado y  $u \in W^{1,p}(U)$  con  $1 < p < \infty$ . Probar que

$$F(u) \in W^{1,p}(U) \quad \text{y} \quad \partial_i F(u) = F'(u) \partial_i u \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n.$$

**Ejercicio 15.** Sea  $1 < p < \infty$  y  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto acotado.

1. Probar que si  $u \in W^{1,p}(U)$ , entonces  $|u| \in W^{1,p}(U)$ .
2. Probar que si  $u \in W^{1,p}(U)$ , entonces  $u^+, u^- \in W^{1,p}(U)$  y

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{c.t.p. en } \{u > 0\}, \\ 0 & \text{c.t.p. en } \{u \leq 0\}, \end{cases} \quad \nabla u^- = \begin{cases} 0 & \text{c.t.p. en } \{u \geq 0\}, \\ -\nabla u & \text{c.t.p. en } \{u < 0\}. \end{cases}$$

Sugerencia:  $u^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u)$  para

$$F_\varepsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

3. Probar que si  $u \in W_0^{1,p}(U)$  entonces  $u^+, u^- \in W_0^{1,p}(U)$ .
4. Probar que si  $u \in W^{1,p}(U)$ , entonces

$$\nabla u = 0 \quad \text{c.t.p. en} \quad \{u = 0\}.$$