Ecuaciones Diferenciales A/B – 1° cuatrimestre 2020

Ecuación de ondas

Ejercicio 1. Utilizar el método de la transformada de Fourier para resolver el siguiente problema:

$$\partial_t^2 u(x,t) - c^2 \partial_x^2 u(x,t) = h(x,t) \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0, \qquad u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0 \quad x \in \mathbb{R},$$

imponiendo las condiciones que sean necesarias sobre la función h, siendo $c > 0$ dado.

Ejercicio 2. Utilizar el método de la transformada de Fourier para hallar la solución del siguiente problema:

$$\partial_t^2 u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^n,\, t > 0, \qquad u(x,0) = g(x), \quad \partial_t u(x,0) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $g \in \mathcal{S}$.

Sugerencia: Luego de transformar, buscar soluciones para la ODE resultante de la forma $\beta e^{t\gamma}$, donde $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 3.

1. Verificar que el cambio de variables: $\xi := x + ct, \eta := x - ct$, transforma la ecuación de ondas $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$ en $\partial_\xi \partial_\eta u = 0$.
2. Usar el cambio de variables en 1. para hallar la fórmula de D'Alembert para la solución de la ecuación de ondas unidimensional.

Ejercicio 4. Encontrar una fórmula explícita para la solución del siguiente problema:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) &= 0 && x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) &= 0 && t > 0, \\ u(x,0) = g(x), \quad \partial_t u(x,0) &= h(x) && x > 0, \end{aligned}$$

suponiendo que $g(0) = h(0) = 0$.

Ejercicio 5. Sean $g \in C^3(\mathbb{R}^3),\ h \in C^2(\mathbb{R}^3)$ y sea u definida por la fórmula de Kirchhoff.

Probar que $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ y satisface el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x,t) - \Delta u(x,t) &= 0 && x \in \mathbb{R}^3,\, t > 0, \\ u(x,0) = g(x), \quad \partial_t u(x,0) &= h(x) && x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Ejercicio 6 (Equipartición de la energía)**.** Sea $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ una solución de la ecuación de

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) &= 0 && x \in \mathbb{R},\, t > 0, \\ u(x,0) = g(x) \quad \partial_t u(x,0) &= h(x) && x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde g y h son suaves con soporte compacto.

La energía cinética, k, y la energía potencial, p, se definen por:

$$k(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_t u)^2 \, dx, \qquad p(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u)^2 \, dx.$$

Probar las siguientes afirmaciones:

1. $k + p$ es constante.
2. $k(t) = p(t)$ para t suficientemente grande.
   Sugerencia: Usar que u está dada por $u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$.

Ejercicio 7. Sea u la solución dada por la fórmula de Kirchhoff para el problema:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x,t) - \Delta u(x,t) &= 0 && x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ u(x,0) = g(x), \quad \partial_t u(x,0) &= h(x) && x \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

donde g, h son suaves y tienen soporte compacto. Mostrar que existe una constante C tal que

$$|u(x,t)| \leq \frac{C}{t} \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad \text{y todo} \quad t > 0.$$

Ejercicio 8. Se dice que una función u es una solución débil de la ecuación de ondas unidimensional si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)(\partial_t^2 \phi(x,t) - \partial_x^2 \phi(x,t))\, dxdt = 0$$

para toda $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$.

1. Mostrar que toda solución clásica de la ecuación de ondas unidimensional es una solución débil y que toda solución débil regular de la ecuación de ondas es solución clásica.
2. Mostrar que las funciones discontinuas

   $$u_1(x,t) := H(x-t) \qquad \text{y} \qquad u_2(x,t) := H(x+t)$$

   donde H es la función de Heaviside:

   $$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0, \end{cases}$$

   son soluciones débiles de la ecuación de ondas unidimensional.

Ejercicio 9. Sea $f \in C_c(\mathbb{R})$. Probar que $u(x,t) := f(x-t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, es solución débil de la ecuación de ondas unidimensional, en el sentido del ejercicio anterior.

Ejercicio 10. Encontrar una solución de la ecuación:

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = \lambda^2 u \qquad\qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

de la forma $u(x,t) = f(x^2 - t^2) = f(s)$, donde $f(0) = 1$, en forma de serie de potencias en s.

Ejercicio 11.

1. Hallar la solución de:

   $$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) &= 0 && x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) &= f(t) && t > 0, \\ u(x,0) = g(x), \quad \partial_t u(x,0) &= h(x) && x > 0, \end{aligned}$$

   donde $f, g, h \in C^2$ satisfacen las siguientes condiciones:

   $$f(0) = g(0), \quad f'(0) = h(0), \quad f''(0) = g''(0).$$

2. Verifiar que la solución obtenida tiene derivadas de segundo orden continuas, aún sobre la característica $x = t$.

Ejercicio 12. Probar que si u es una solución clásica radial de la ecuación de ondas en dimensión 3 (es decir, $u(x,t) = w(|x|,t)$, $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$, para alguna $w : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$), se tiene que existen F y G tales que

$$u(x,t) = \frac{F(|x| - t) + G(|x| + t)}{|x|} \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad \text{y todo} \quad t > 0.$$