Ecuaciones Diferenciales A/B – 1° cuatrimestre 2020

Ecuaciones de primer orden

Ejercicio 1. Resolver

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_i u(x) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad\qquad u|_{x_1=0} = x_2.$$

Ejercicio 2. Resolver

$$x \cdot \nabla u(x) = |x|^2 \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad\qquad u|_{x_1=1} = 3x_n.$$

Estudiar el dominio de definición de la solución.

Ejercicio 3. Considerar la ecuación:

$$xu_x(x,y) - yu_y(x,y) = 0 \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1. Mostrar, por consideraciones geométricas, que la solución general de (1) es $u(x,y) = f(xy)$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$.
2. Encontrar la solución cuyo gráfico contiene a la recta de ecuación $y = x$.
3. ¿Qué pasa con el problema de valores iniciales cuando estos se dan sobre la curva $y = 1/x$?

Ejercicio 4. Probar que no existe solución de la ecuación

$$u_x(x,y) + u_y(x,y) = u(x,y) \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

que satisfaga $u = 1$ sobre la recta $y = x$.

Ejercicio 5. Probar que la solución de la ecuación

$$u_x(x,y) + u_y(x,y) = (u(x,y))^2 \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

cuyo gráfico contiene a la recta $x = -y = u$ no está definida sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$.

Ejercicio 6. Sea u la solución clásica del problema

$$u_t(x,t) + f(x,t)u_x(x,t) = \psi(x,t) \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \qquad\qquad u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Verificar que sobre las trayectorias $(x(t), t)$, u se expresa como

$$u(x(t), t) = u_0(x(0)) + \int_0^t \psi(x(s), s)ds.$$

Ejercicio 7. Hallar la solución de la ecuación

$$(x^2 + y^2)u_x(x,y) + 2xyu_y(x,y) = (x+y)u(x,y) \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

que satisface $u(0,y) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 8. Considerar el operador diferencial

$$Lu := x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} - 3u,$$

y resolver los siguientes problemas:

1. $Lu = 0$ en $\mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$, $\qquad u(x,y,0) = xy \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. $Lu = 0$ en $\mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$, $\qquad u(x,y,0) = f(x,y) \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

En el segundo problema, imponer condiciones adecuadas de diferenciabilidad a f.

Ejercicio 9. Usar el principio de Duhamel para resolver el problema

$$u_t(x,t) + vu_x(x,t) = f(x,t) \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \qquad\qquad u(x,0) = 0 \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hallar una fórmula explícita para la solución cuando $f(x,y) := e^{-t} \sin x$.

Ejercicio 10. Enunciar y probar un teorema de existencia y unicidad para el problema

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + \mathbf{v} \cdot \nabla u(x,t) &= f(x,t) - \gamma u(x,t) && x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) &= g(x) && x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

donde $\gamma > 0$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ son constantes, imponiendo adecuadas condiciones de regularidad sobre f y g.

Ejercicio 11. Sea $v \in \mathbb{R}$. Demostrar que si $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ es solución de

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + vu_x(x,t) &= 0 && x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) &= h(t) && t > 0, \\ u(x,0) &= g(x) && x > 0, \end{aligned}$$

entonces se obtiene la siguiente estimación de estabilidad:

$$\int_0^R u^2(x,t)\, dx \leq \int_0^R g^2(x)\, dx + v \int_0^t h^2(s)\, ds.$$

Deducir de esta estimación la unicidad de soluciones para este problema.

Ejercicio 12. Considerar el problema:

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \qquad\qquad u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Una curva $(x(t), t)$ en el plano se dice característica si

$$x'(t) = u(x(t), t) \qquad\qquad t > 0.$$

1. Demostrar que u es constante a lo largo de cada curva característica.
2. Demostrar que las pendientes de las curvas características están dadas por $dt/dx = 1/u$ y usarlo para probar que las curvas características son rectas determinadas por los datos iniciales.
3. Suponer que $x_1 < x_2$ y $u_0(x_1) > u_0(x_2) > 0$. Mostrar que las dos características que pasan por los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ se intersecan en un punto $P = (\bar{x}, \bar{t})$ con $\bar{t} > 0$. Mostrar que esto, junto con la parte 1 implica que la solución no puede ser continua en P.
4. Calcular $\bar{t}$.

Ejercicio 13. Repetir el ejercicio 12 para la ecuación

$$u_t(x,t) + \left(f(u(x,t))\right)_x = 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{2}$$

donde $f'' > 0$ y $f'(u_0) > 0$. Las características se definen ahora mediante

$$x'(t) = f'(u(x(t), t)) \qquad\qquad t > 0.$$

Decimos que la ecuación (2) está en *forma de divergencia*.

Concluir que, en general, es imposible hallar una solución continua, independientemente de la suavidad de f.

Ejercicio 14. Sea $D := [-a, a] \times [0, T]$ y sea $\phi \in C^1(D)$ tal que

$$\phi(\pm a, t) = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq T \qquad \text{y} \qquad \phi(x, T) = 0 \quad \text{para} \quad -a \leq x \leq a. \tag{3}$$

1. Probar que si u es solución de (2) entonces verifica

$$\iint_D [u\phi_t + f(u)\phi_x]\,dxdt + \int_{-a}^{a} u_0(x)\phi(x,0)\,dx = 0. \tag{4}$$

Una función $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ tal que $f(u) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ que verifique (4) para todo rectángulo D y toda $\phi \in C^1(D)$ que verifique (3) se denomina una solución débil de (2).

2. Mostrar que si u es una solución débil de (2) y es de clase C^1 entonces es una solución *clásica* de (2).

Ejercicio 15. Considerar el problema:

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0 \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0, \qquad\qquad u(x,0) = \begin{cases} -1 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}.$$

Mostrar que para todo $\alpha \geq 1$, la función u_α es una solución débil de la ecuación (en el sentido del ejercicio anterior), donde u_α viene dada por:

$$u_\alpha(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq \frac{1-\alpha}{2}t, \\ -\alpha & \text{si} \quad \frac{1-\alpha}{2}t \leq x \leq 0, \\ \alpha & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{\alpha-1}{2}t, \\ -1 & \text{si} \quad \frac{\alpha-1}{2}t < x. \end{cases}$$