Ecuaciones Diferenciales A/B – 1° cuatrimestre 2020

Ecuación del calor

Ejercicio 1. Sea u una solución de $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

1. Probar que $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ también resuelve la ecuación del calor para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Mostrar que, si u es suficientemente regular, $v(x,t) := x \cdot \nabla u(x,t) + 2tu_t(x,t)$ también resuelve la ecuación del calor.

Ejercicio 2. Diremos que una función u es *calórica* en U si verifica la ecuación del calor $u_t - \Delta u = 0$ en U. Verificar las siguientes afirmaciones indicando en cada caso las hipótesis de regularidad sobre u necesarias para su validez.

1. *Combinaciones lineales.* Si u_1 y u_2 son funciones calóricas entonces $\alpha u_1 + \beta u_2$ también lo es.
2. *Traslaciones.* Si $u(x,t)$ es calórica entonces $u(x-\xi, t-\tau)$ también lo es, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$.
3. *Diferenciación respecto a parámetros.* Si $u(x,t,\lambda)$ es calórica para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\partial_\lambda u(x,t,\lambda)$ también lo es.
4. *Integración respecto a parámetros.* Si $u(x,t,\lambda)$ es calórica para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\int_a^b u(x,t,\lambda)\, d\lambda$ es calórica.
5. *Diferenciación respecto a x y t.* Si $u(x,t)$ es calórica entonces $D_x^\alpha \partial_t^k u$ es calórica todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y todo $k \in \mathbb{N}_0$.
6. *Integración respecto a x y t.* Considerar $n = 1$. Si $u(x,t)$ es calórica, entonces $\int_{x_0}^x u(y,t)\, dy$ es calórica si $\partial_x u(x_0, t) = 0$ y $\int_a^t u(x,s)\, ds$ es calórica si $u(x,a) = 0$.
7. *Convoluciones.* Si $u(x,t)$ es calórica, entonces $\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y,t)\varphi(y)\, dy$ y $\int_a^b u(x,t-s)\varphi(s)\, ds$ son calóricas.

Ejercicio 3.

1. Verificar que si ϕ es una solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$ y existe $w : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(x,t) = w(|x|,t)$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ y todo $t > 0$ (i.e., ϕ tiene simetría esférica), entonces w satisface:

$$w_{rr} + \frac{2}{r} w_r = w_t \qquad r > 0,\ t > 0. \tag{1}$$

2. Mostrar que la ecuación (1) puede reducirse a la ecuación del calor unidimensional mediante el cambio $\psi = rw$.

Ejercicio 4. Para $i = 1, \dots, n$, sea u_i una solución de

$$\partial_t u_i(x,t) = \partial_{xx} u_i(x,t) \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \qquad u_i(x,0) = \varphi_i(x) \quad x > 0.$$

Probar que la función

$$u(x,t) := u_1(x_1,t) \cdots u_n(x_n,t) \qquad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0,$$

es solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ y satisface $u(x,0) = \varphi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, donde $\varphi(x) := \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)$.

Ejercicio 5. Sea $u(x,t) := v(x^2/t)$ para $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

1. Verificar que $u_t = \partial_{xx} u$ en $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ si y sólo si

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0 \qquad z \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

2. Verificar que la solución general de (2) es

$$v(z) = C_1 \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2} ds + C_2 \qquad \text{para} \quad z \in \mathbb{R} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

3. Derivar $v(x^2/t)$ respecto a x y seleccionar C_1 adecuadamente para obtener la solución fundamental Φ.

Ejercicio 6. Sea

$$u(x,t) := \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \qquad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

donde α y β son constantes.

1. Verificar que u satisface la ecuación del calor si y sólo si v satisface

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0,$$

   para $y = t^{-\beta} x$.
2. Verificar que si $\beta = 1/2$, v satisface

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot Dv + \Delta v = 0.$$

3. Verificar que si v es radial, i.e. $v(y) = w(|y|)$ para $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces w satisface

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0,$$

   donde $r = |y|$, $' = \frac{d}{dr}$.
4. Tomar $\alpha = n/2$ y hallar la solución fundamental de la ecuación del calor.

Ejercicio 7 (Método de similaridad)**.**

1. Hallar todas las soluciones de la ecuación del calor unidimensional que satisfacen

$$u(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t) \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad \text{y todo} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Mostrar que el método de similaridad dado en el item anterior también puede aplicarse a la ecuación del calor no lineal

$$\partial_x \left(K(u) \partial_x u\right) = \partial_t u,$$

   donde K es una función en $C^1(\mathbb{R})$.

Ejercicio 8.

1. Sea $a(t) > 0$ una función continua y sea $u(x,t)$ una solución regular de $u_t = a\Delta u$. Mostrar que existe un cambio de variables $t = \phi(\tau)$ tal que $U(x,\tau) := u(x, \phi(\tau))$ es solución de la ecuación del calor.
2. Sea $b(t) \in \mathbb{R}^n$ continua y sea $u(x,t)$ una solución regular de $u_t = \Delta u + b \cdot \nabla u$. Mostrar que existe un cambio de variables $x = \psi(y,t)$ tal que $U(y,t) := u(\psi(y,t), t)$ es solución de la ecuación del calor.
3. Sea $c(t) \in \mathbb{R}$ continua y sea $u(x,t)$ una solución regular de $u_t + cu = \Delta u$. Mostrar que existe $\varphi(t)$ derivable, tal que $U(x,t); = u(x,t)\varphi(t)$ es solución de la ecuación del calor.
4. Escribir una fórmula explícita para una solución de

$$\begin{cases} au_t + cu = \Delta u + b \cdot \nabla u + f & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u = g & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

   donde $c(t) \in \mathbb{R}, a(t) > 0$ y $b(t) \in \mathbb{R}^n$ son continuas.

Ejercicio 9 (Principio de Duhamel)**.** Sea u la solución del siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \partial_{xx}u(x,t) = g(x,t) & 0 < x < L,\, t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < L. \end{cases}$$

Probar que u puede ser representada en la forma

$$u(x,t) = \int_0^t \varphi(x,t;s)\,ds \qquad 0 < x < L,\, t > 0,$$

donde Φ es la solución del problema

$$\begin{cases} \varphi_t(x,t) - \varphi_{xx}(x,t) = 0 & 0 < x < L,\, t > s, \\ \varphi(0,t;s) = \varphi(L,t;s) = 0 & t > s, \\ \varphi(x,s;s) = g(x,s) & 0 < x < L. \end{cases}$$

Ejercicio 10. Usar la transformada de Fourier para resolver el problema

$$u_t(x,t) - \partial_{xx}u(x,t) = g(x,t) \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \qquad u(x,0) = f(x) \quad x \in \mathbb{R},$$

donde f y $g(\cdot,t)$ para cada t fijo, son funciones de $\mathcal{S}$.

Ejercicio 11. Deducir la fórmula explícita

$$u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{\frac{-x^2}{4(t-s)}} h(s)ds \qquad x > 0,\, t > 0,$$

para la solución del problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \partial_{xx}u(x,t) = 0 & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0 & x > 0, \\ u(0,t) = h(t) & t > 0, \end{cases}$$

donde $h(0) = 0$.

Sugerencia: Definir $v(x,t) := u(x,t) - h(t)$ y extender a $v(\cdot,t)$ por imparidad.

Ejercicio 12. Mostrar que la solución acotada de

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \partial_{xx}u(x,t) = 0 & x > 0,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & x > 0, \end{cases}$$

está dada por la fórmula

$$u(x,t) = \int_0^\infty N(x,\xi,t) f(\xi) d\xi \qquad x > 0,\, t > 0,$$

donde $N(x,\xi,t) := \Phi(x-\xi,t) + \Phi(x+\xi,t)$ y Φ es la solución fundamental de la ecuación del calor.

Sugerencia: Extender f por paridad a $-\infty < x < 0$ y resolver el problema de valores iniciales para la f extendida.

Ejercicio 13. Sea u la solución del problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \partial_{xx}u(x,t) & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

dada por la convolución (en la variable x) de φ con la solución fundamental. Probar que si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, entonces para todo $t > 0$ se tiene que $u(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx.$$

Ejercicio 14. Decimos que $v \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ es una *subsolución* de la ecuación del calor si

$$v_t - \Delta v \leq 0 \qquad \text{en} \quad U_T.$$

1. Probar que $\max_{U_T} v = \max_{\Gamma_T} v$.
2. Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un función suave y convexa. Probar que si u es solución de la ecuación del calor y $v := \phi \circ u$, entonces v es una subsolución de la ecuación del calor.
3. Probar que $v := |\nabla u|^2 + u_t^2$ es una subsolución si u es una solución de la ecuación del calor.

Ejercicio 15.

1. Sea $C(x,t;r) := B_r(x) \times (t - r^2, t]$ para $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ y $r > 0$. Probar que si u es solución de la ecuación del calor en $C(0,0;2)$ entonces existe una constante C universal tal que
$$\max_{C(0,0;1)} |\nabla_x u| \leq C \max_{C(0,0;2)} |u|.$$
2. Con la notación del ejercicio anterior, probar que si $K \subset \overline{U_T} \setminus \partial_p U_T$ es compacto, entonces existe una constante C que depende de $dist(K, \partial_p U_T)$ tal que
$$\max_K |\nabla_x u| \leq C \max_{U_T} |u|.$$

Ejercicio 16. Para $n \in \mathbb{N}$, sea u_n una solución regular del siguiente problema:

$$(u_n)_t - \Delta u_n = 0 \quad \text{en} \quad U_T, \qquad u_n = f_n \quad \text{en} \quad \partial_p U_T.$$

Probar que si $f_n \to f$ uniformemente en $\partial_p U_T$, entonces existe u regular tal que $u_n \to u$ uniformemente sobre U_T y u es solución de

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad U_T, \qquad u = f \quad \text{en} \quad \partial_p U_T.$$

Ejercicio 17. Sea u una solución acotada de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^{n+1}$. Probar que u es constante. ¿Es cierto el resultado si eliminamos la hipótesis que u sea acotada?

Ejercicio 18. Sea u una solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $u = 0$ si $x_1 = 0$, uniformemente Lipschitz. Probar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $u(x,t) = \alpha x_1$.

Ejercicio 19 (Principio del máximo para problemas parabólicos)**.** Definimos

$$\mathcal{L}u := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\partial_i u,$$

donde los coeficientes a_{ij}, b_i son continuos, $a_{ij} = a_{ji}$ y la matriz $A = (a_{ij})$ es definida positiva. Es decir, $\mathcal{L}$ es un operador elíptico según la definición del Ejercicio 13 de la práctica 2.

Probar que si $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ satisface

$$u_t + \mathcal{L}u = 0 \quad \text{en } U_T,$$

entonces

$$\max_{\overline{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

Al operador $\partial_t + \mathcal{L}$ se lo denomina *operador parabólico.*

Ejercicio 20. Sea $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ solución de

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{en} \quad U_T, \qquad u = 0 \quad \text{en} \quad \partial_p U_T,$$

donde $f = f(x)$. Probar que si $f \leq 0$, entonces $u_t \leq 0$.

Sugerencia: Definir $w(x,t) = u(x, t+\varepsilon) - u(x,t)$, calcular $w_t - \Delta w$ y aplicar el principio del máximo. Ver el ejercicio 14.

Ejercicio 21. Consideremos el paseo aleatorio simétrico. Supongamos que en el punto $L = \bar{m}h + h/2 > 0$ se ubica una barrera perfectamente refractante: si una partícula llega al punto $L - h/2$ a tiempo t y se mueve hacia la derecha, entonces es reflejada y regresa al punto $L - h/2$ en el tiempo $t + \tau$.

Mostrar que cuando $h, \tau \to 0$ y $h^2/\tau = 2D$, $p = p(x,t)$ es una solución del problema

$$\begin{cases} p_t(x,t) - Dp_{xx}(x,t) = 0 & x < L,\ t > 0, \\ p(x,0) = \delta & x < L, \\ p_x(L,t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

Además, $\int_{-\infty}^{L} p(x,t)\,dx = 1$. Calcular explícitamente la solución.

Ejercicio 22. Consideremos el paseo aleatorio simétrico. Supongamos que en el punto $L = \bar{m}h > 0$ se ubica una barrera perfectamente absorbente: si una partícula llega al punto $L - h$ a tiempo t y se mueve a la derecha, es absorbida y se detiene en L. Mostrar que cuando $h, \tau \to 0$ y $h^2/\tau = 2D$, $p = p(x,t)$ es una solución del problema

$$\begin{cases} p_t(x,t) - Dp_{xx}(x,t) = 0 & x < L,\ t > 0, \\ p(x,0) = \delta & x < L, \\ p(L,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Calcular explícitamente la solución.