Ecuaciones Diferenciales A/B – 1° cuatrimestre 2020

Series de Fourier y separación de variables

Los ejercicios marcados con una estrella ($\star$) son opcionales y pueden involucrar temas no vistos en las clases teóricas.

Ejercicio 1. Sean $p \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible e integrable en $[-p, p]$ tal que $f(x + 2p) = f(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Verificar los siguientes resultados:

1. $\int_{2p}^{2p+x} f(t)\, dt = \int_0^x f(t)\, dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $\int_{x-p}^{x+p} f(t)\, dt = \int_{-p}^{p} f(t)\, dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) := \int_0^x f(t)\, dt$. Entonces $g(x + 2p) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\int_{-p}^{p} f(t)\, dt = 0$.

Ejercicio 2. En cada caso, determinar la serie de Fourier de senos de f y estudiar la convergencia puntual de la serie hallada.

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x = \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$
2. $f(x) = x \quad (0 \leq x < \pi)$.

Ejercicio 3. Sea $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Demostrar que el polinomio trigonométrico de grado N que mejor aproxima a f en $L^2([-\pi, \pi])$ es el que se obtiene al truncar la serie de Fourier de f a sus $N + 1$ primeros términos. Es decir, si

$$p_N(x) := \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)),$$

donde $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, N$, entonces

$$\mathcal{E}_N := \|f - p_N\|_{L^2([-\pi,\pi])},$$

es mínimo cuando $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_k = a_k$, $\beta_k = b_k$, $k = 1, \ldots, N$, donde a_k y b_k son los coeficientes de Fourier de f definidos por

$$a_k := \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos(kx)\, dx \qquad \text{y} \qquad b_k := \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin(kx)\, dx.$$

Ejercicio 4. Utilizar el método de separación de variables para hallar una solución del siguiente problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un rectángulo:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & & 0 < x < \pi,\ 0 < y < A, \\ u(0, y) = 0, & u(\pi, y) = 0 & 0 \leq y \leq A, \\ u(x, 0) = f(x), & u(x, A) = 0 & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Suponer que $f \in AC([0, \pi])$, $f' \in L^2([0, \pi])$ y que se verifican las condiciones de compatibilidad $f(0) = f(\pi) = 0$.

Ejercicio 5. Utilizar el método de separación de variables para hallar una solución formal del siguiente problema para la ecuación de Laplace en un rectángulo:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ u(0, y) = f_1(y), & u(1, y) = f_2(y) & 0 \leq y \leq 1, \\ u(x, 0) = f_3(x), & u(x, 1) = f_4(x) & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

y determinar condiciones sobre las funciones f_i, $i = 1, \ldots, 4$, de modo que la solución obtenida sea una solución clásica.

Ejercicio 6. Utilizar el método de separación de variables para hallar una solución formal del problema de la vibración libre de una cuerda con dos extremos fijos:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) & & 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & u(\ell,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & u_t(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

Determinar condiciones sobre las funciones f y g de modo que la solución obtenida sea una solución clásica del problema.

Ejercicio 7. Hallar una solución del problema de la vibración forzada de una cuerda con dos extremos fijos:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + h(x,t) & & 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & u(\ell,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & u_t(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq \ell, \end{cases}$$

haciendo las suposiciones que considere necesarias sobre las funciones f, g y h.

Sugerencia: Buscar soluciones de la forma $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin(\frac{k\pi}{\ell} x)$.

Ejercicio 8. Hallar una solución del problema:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + k u(x,t) & & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & u(\pi,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x) & & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Suponer que f es absolutamente continua en $[0,\pi]$, $f' \in L^2([0,\pi])$ y $f(0) = f(\pi) = 0$.

Sugerencia: Considerar la transformación $u(x,t) = w(x,t)e^{kt}$.

Ejercicio 9. Hallar una solución del problema:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + u_x(x,y) = 0 & & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u(0,y) = 0, & u(\pi,y) = \sin(y) & 0 \leq y \leq \pi, \\ u(x,0) = 0, & u(x,\pi) = 0 & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Ejercicio 10. Utilizar el método de separación de variables para hallar una solución del siguiente problema de Neumann para la ecuación de Laplace en un disco:

$$\Delta u = 0 \quad \text{en} \quad B, \qquad\qquad \partial_{\mathbf{n}} u = f \quad \text{sobre} \quad \partial B,$$

donde $B := B_1(0)$ es la bola unitaria abierta en $\mathbb{R}^2$, centrada en el origen, y $f \in C^1(\partial B)$ es tal que $\int_{\partial B} f\, dS = 0$. Probar, además, que este problema no tiene solución si $\int_{\partial B} f dS \neq 0$.

Sugerencia: Trabajar en coordenadas polares y buscar soluciones que sean acotadas en el origen.

Ejercicio 11. Utilizar el método de separación de variables para hallar una solución formal de la ecuación de ondas

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \qquad \text{en} \quad B \times (0,\infty),$$

donde $B := B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$.

Sugerencia:

1. Transformar el problema a coordenadas polares.
2. Buscar soluciones de la forma $u(r,\theta,t) = \varphi(r,\theta)T(t)$ y verificar que φ debe ser solución de la ecuación de Helmotz $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Aquí el Laplaciano debe entenderse en coordenadas polares.
3. Buscar soluciones de la forma $\varphi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ para la ecuación de Helmotz. Verificar que
$$\Theta(\theta) = A_k \cos(k\theta) + B_k \sin(k\theta) \qquad \text{donde} \qquad k \in \mathbb{N}_0 \qquad (A_k, B_k \in \mathbb{R}),$$
y que R debe ser solución de
$$r^2 R'' + rR' + (\lambda r^2 - k^2) = 0, \qquad \text{donde} \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

4. Suponer $\lambda > 0$ y verificar que haciendo la transformación $z = \sqrt{\lambda}r$ la ecuación para R se reduce a la *ecuación de Bessel* de orden k:
$$z^2\frac{d^2R}{dz^2} + z\frac{dR}{dz} + (z^2 - k^2)R = 0.$$
5. Tener en cuenta que la *función de Bessel de primer tipo* de orden k:
$$J_k(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(j+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2j+k},$$
resuelve la ecuación de Bessel de orden k y está acotada en $x = 0$.

$\star$ Investigar la resolución del problema de la vibración transversal de una membrana circular con borde fijo:
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta u = 0 & \text{en} \quad B \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial B \times [0,\infty), \\ u = f, \qquad u_t = 0 & \text{en} \quad B \times \{0\}, \end{cases}$$
donde $B := B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 12. Utilizar el método de separación de variables para hallar una solución formal de la ecuación del calor:
$$u_t - c^2\Delta u = 0 \qquad \text{en} \quad B \times (0,\infty),$$
donde $B := B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$.

Sugerencia: Seguir pasos similares a los sugeridos en el Ejercicio 11.

$\star$ Investigar la resolución del problema de conducción de calor en un cilindro circular semi-infinito:
$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en} \quad B \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial B \times [0,\infty), \\ u = f & \text{en} \quad B \times \{0\}, \end{cases}$$
donde $B := B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 13. Sea $Q := (0,1) \times (0,1)$ el cuadrado unitario en $\mathbb{R}^2$. Verificar que las soluciones que se obtienen mediante el método de separación de variables para el problema de autovalores:
$$-\Delta u = \lambda u \qquad \text{en} \quad Q, \qquad u = 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial Q,$$
están dadas por
$$u_{k,j}(x,y) = \sin(\pi j x)\sin(\pi k y) \qquad \text{donde} \quad \lambda_{k,j} := \pi^2(j^2 + k^2), \qquad j,k \in \mathbb{N}.$$