RECUPERATORIO DEL SEGUNDO PARCIAL - 19/08/2020

Para aprobar el examen se deben resolver correctamente al menos dos ejercicios. Recuerde justificar todas las respuestas.

1. Sea $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ solución de:

$$(y-x)u_x(x,y) - (x+y)u_y(x,y) = 0.$$

Demostrar que u es constante.

2. Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ solución del problema:

$$u_{tt} - \Delta u + u^3 = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \qquad u = g, \quad u_t = h \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^3.$$

Demostrar que si $g = h = 0$ en $B_{t_0}(x_0) \times \{0\}$ para algún $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$ entonces $u = 0$ en el conjunto:

$$K(x_0,t_0) := \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) : 0 \leq t < t_0,\, |x - x_0| \leq t_0 - t\right\}.$$

Sugerencia: Considerar la energía $e(t) := \int_{B_{t_0-t}(x_0)} \left(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}u^4\right) dx$ para $t \in (0, t_0)$.

3. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado con frontera de clase C^1. Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe una constante positiva $C(\varepsilon)$ tal que:

$$\|u\|_2 \leq \varepsilon \|u\|_{1,2} + C(\varepsilon)\|u\|_1 \qquad \text{para toda} \quad u \in H^1(U).$$

4. (a) Demostrar que para cada $u \in H^1(0,1)$ existe una única función $\tilde{u} \in C([0,1]) \cap H^1(0,1)$ tal que $\tilde{u} = u$ ctp, $\tilde{u}' = u'$ ctp, y $\max_{x\in[0,1]} |\tilde{u}(x)| \leq \|u\|_2 + \|u'\|_2$.
De aquí en más, identificaremos $u \in H^1(0,1)$ con su representante $\tilde{u} \in C([0,1]) \cap H^1(0,1)$.
Sugerencia: Considerar $v(x) := \int_a^x u'\, dt$ para $x \in [0,1]$, donde $a \in (0,1)$ está fijo. Probar que

$$|v(y) - v(x)| \leq \|u'\|_2 |y-x|^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\, x, y \in [0,1],$$

que la derivada débil de v es u', y concluir.

(b) Dado $f \in L^2(0,1)$, demostrar que el problema:

$$B[u,v] = \langle F, v\rangle \qquad \forall\, v \in H^1(0,1), \tag{1}$$

admite una única solución $u \in H^1(0,1)$, donde:

$$B[u,v] := \int_0^1 (u'v' + uv)\, dx + (u(1) - u(0))(v(1) - v(0)) \qquad u, v \in H^1(0,1),$$
$$\langle F, v\rangle := \int_0^1 fv\, dx \qquad v \in H^1(0,1).$$

(c) Si $f \in C(0,1)$ y $u \in C^2(0,1) \cap C([0,1])$ es una solución de (1), qué ecuación satisface u?