

RECUPERATORIO DEL PRIMER PARCIAL - 12/08/2020

Para aprobar el examen se deben resolver correctamente al menos dos ejercicios. Recuerde justificar todas las respuestas.

1. Considerar el problema:

$$u_{tt}(x, t) + u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \quad 0 < x < \pi, t > 0, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0 \quad 0 < x < \pi. \quad (3)$$

- (a) Usar el método de separación de variables para hallar una solución formal de (1)-(2)-(3).
 (b) Establecer condiciones sobre la función f para que la solución hallada en el ítem anterior sea una solución clásica de (1)-(2)-(3).

2. Considerar el problema:

$$u_t(x, t) + \Delta^2 u(x, t) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \quad u(x, 0) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde f es una función en la clase de Schwartz $\mathcal{S}$ y $\Delta^2 u := \Delta(\Delta u)$ para $u \in C^4(\mathbb{R}^n)$. Demostrar que existe $\varphi \in \mathcal{S}$ tal que

$$u(x, t) := \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n/4} \varphi(t^{-1/4}(x - y)) f(y) dy \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

es solución del problema dado.

Sugerencia: No buscar φ de manera explícita si no caracterizarla por su transformada de Fourier.

3. Sea $B := B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, y sea $u \in C^2(B \setminus \{0\}) \cap C(\bar{B} \setminus \{0\})$ una función armónica en $B \setminus \{0\}$ tal que $|x|^{n-2}u(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow 0$. Probar que existe una única función armónica en B que es continua en $\bar{B}$ y coincide con u en $\bar{B} \setminus \{0\}$ (o sea, una única extensión armónica de u a B).

Sugerencia: Considerar

$$\tilde{u}(x) := \int_{\partial B} u(y) P(x, y) dy$$

donde P es el núcleo de Poisson de B . Luego, considerar las funciones

$$v_\varepsilon(x) := u(x) - \tilde{u}(x) \pm \varepsilon(|x|^{2-n} - 1)$$

para comparar u y $\tilde{u}$.

4. Considerar el problema:

$$\beta(x, t) u_t(x, t) - \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) u_{x_i x_i}(x, t) + u(x, t) = 0 \quad x \in U, 0 < t \leq T,$$

$$u(x, t) = h(x, t) \quad x \in \partial U, 0 < t \leq T,$$

$$u(x, 0) = g(x) \quad x \in U,$$

donde $T > 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y acotado, $\alpha_i \in C((0, T])$ para $i = 1, \dots, n$, $\beta \in C(U \times (0, T])$, $h \in C(\partial U \times (0, T])$ y $g \in C(U)$. Probar que si $\alpha_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ y $\beta > \beta_0 > 0$ para algún β_0 , entonces el problema dado tiene a lo sumo una solución en $C^2(U \times (0, T]) \cap C(\bar{U} \times [0, T])$.