

SEGUNDO PARCIAL - 05/08/2020

Para aprobar el examen se deben resolver correctamente al menos dos ejercicios. Recuerde justificar todas las respuestas.

1. Considerar el problema:

$$u_t(x, t) + (f(u(x, t)))_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = g(x) \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

donde las funciones f y g están dadas por:

$$f(x) := \frac{x(2-x)}{2} \quad \text{y} \quad g(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 + \frac{x}{2} & \text{si } 0 < x < 2, \\ 2 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

- (a) Verificar que las curvas características no se intersecan en $\mathbb{R} \times (0, 2)$ y usar el método de las características para determinar una solución clásica. Explicitar el dominio de definición de dicha solución.

- (b) Determinar una solución débil de (1)-(2).

2. Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ la solución del problema:

$$u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^3, t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = h(x) \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

donde $h \in C_c^2(\mathbb{R}^3)$. Demostrar las siguientes estimaciones:

- (a) $|u(x, t)| \leq \frac{R^2}{t} \|h\|_\infty$ para todos $x \in \mathbb{R}^3$ y $t > 0$, siendo $R > 0$ tal que $\text{sop}(h) \subset B_R(0)$.

- (b) $|u(x, t)| \leq \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla h(y)| dy$ para todos $x \in \mathbb{R}^3$ y $t > 0$.

Sugerencia: Escribir $h(x + t\nu) = - \int_t^\infty (h(x + \rho\nu))_\rho d\rho$.

3. Demostrar que para $n \geq 3$ existe una constante positiva C que depende sólo de n tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)^2}{|x|^2} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx \quad \text{para toda } u \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Sugerencia: Calcular la divergencia del campo de vectores $F(x) := \frac{x}{|x|^2}$, $x \neq 0$.

4. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado, conexo con frontera ∂U de clase C^1 , y sean $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \partial U$ de medida positiva, disjuntos y tales que $\partial U = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Considerar el problema:

$$-\Delta u = f \quad \text{en } U, \quad u = 0 \quad \text{en } \Gamma_1, \quad \partial_n u = g \quad \text{en } \Gamma_2, \quad (3)$$

donde $f \in L^2(U)$ y $g \in L^2(\partial U)$.

- (a) Probar que existe $C > 0$ tal que:

$$\int_U u^2 dx \leq C \int_U |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in H_{\Gamma_1}^1(U),$$

donde $H_{\Gamma_1}^1(U) := \{u \in H^1(U) : u = 0 \text{ en } \Gamma_1\}$.

- (b) Probar que $(u, v) := \int_U \nabla u \cdot \nabla v dx$ define un producto interno en $H_{\Gamma_1}^1(U)$ y que le da estructura de espacio de Hilbert.

- (c) Dar una formulación débil para (3) y probar la existencia y unicidad de solución débil.